Задания к практическим занятиям

Раздел 1 Ряды Фурье

Тема 1 Ряды Фурье по ортогональным системам функций

1 Вычислить скалярное произведение функций $\varphi(x)=x^3$ и $\psi(x)=x^4+1$ на отрезке $[0;1]$.

2 Доказать, что система $\sin\frac{\pi x}{l}$, $\sin\frac{2\pi x}{l}$, …, $\sin\frac{n\pi x}{l}$, … на отрезке $[0;l]$ является ортогональной и построить соответствующую ей ортонормированную систему.

3 Доказать, что система *многочленов Лежандра*, определяемая следующим образом:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-n\right)^n,\ n=0,1,\ldots,$$

на отрезке $[-1;1]$ является ортогональной.

4 Записать первые три члена разложения функции $f(x)=x$ на отрезке $[-1;1]$ по ортогональным многочленам Лежандра.

Примеры оформления решения

1 Вычислить скалярное произведение функций $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ на отрезке $[0;1]$.

Решение. Имеем:

$$(\varphi,\psi)=\int_0^1 xx^2dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}.$$

2 Вычислить норму функции $\varphi(x)=\sin x$ в $L_2[0;\pi]$.

Решение. Так как

$$\|\varphi\|^2=\int_0^{\pi}\sin^2 xdx=\left.\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\right|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2},$$

то $\|\varphi\|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3 Проверить ортогональны ли функции $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ на отрезках а) $[-1;1]$, б) $[0;1]$.

Решение.

а) функции $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ являются ортогональными на отрезке $[-1;1]$, так как

$$(\varphi,\psi)=\int_{-1}^{1} xx^2dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1}=0\ ;$$

б) функции $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ не являются ортогональными на отрезке $[0;1]$, поскольку

$$(\varphi,\psi)=\int_{0}^{1} x\cdot x^2dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{1}=\frac{1}{4}\neq 0\,.$$

4 Доказать, что основная тригонометрическая система функций

$$\left(1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},...,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},...\right)$$

на отрезке $[-l;l]$ является ортогональной и построить соответствующую ей ортонормированную систему.

Решение. Докажем, что система ортогональна. Имеем:

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}+\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\left.\left(\frac{1}{2}\frac{l}{m-n}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l}+\frac{1}{2}\frac{l}{m+n}\sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)\right|_{-l}^{l}=0\ .$$

Аналогично доказывается равенство нулю остальных интегралов:

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0\quad\forall\ n\in\mathbb{N},$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0\quad\forall\ n\in\ \mathbb{N},$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0\ \ \forall\, m,n\in\mathbb{N},\ m\neq n,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0\ \forall\, m,n\in\mathbb{N},\ m\neq n,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0\ \forall\, m,n\in\mathbb{N},\ m\neq n.$$

Вычислим норму первого члена основной тригонометрической системы функций. Так как

$$\|1\|^2=\int_{-l}^{l}(1)^2\,dx=x\Big|_{-l}^{l}=2l,$$

то $\|1\|=\sqrt{2l}$.

Найдем норму произвольного члена системы, содержащего косинусы:

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)^2dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2\pi nx}{l}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x+\frac{l}{4n\pi}\sin\frac{2\pi nx}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l}=l\Rightarrow\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l},\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l}\quad\forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Разделим каждый член ортогональной на $[-l;l]$ системы на соответствующую ему норму. В результате получается ортонормированная на отрезке $[-l;l]$ *система функций:*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2l}},\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\ldots,\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},\ldots\right).$$

5 Записать первые три члена разложения функции $f(x)=e^x$ на отрезке $[-1;1]$ по ортогональным многочленам Лежандра.

Решение. Ортогональная на $[-1;1]$ система многочленов Лежандра задается условием:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n,\ n=0,1,...$$

Первые три члена этой системы имеют вид:

$$P_0(x)=1,$$

$$P_1(x)=x,$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right).$$

Запишем обобщенный ряд Фурье для функции $f(x)=e^x\in L_2[-1;1]$:

$$e^x\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x)$$

и найдем три первых члена искомого разложения, использовав формулы:

$$c_0=\frac{(f,P_0(x))}{\|P_0(x)\|^2},\ c_1=\frac{(f,P_1(x))}{\|P_1(x)\|^2},\ c_2=\frac{(f,P_2(x))}{\|P_2(x)\|^2}$$

Вычислим квадраты нормы многочленов Лежандра:

$$\|P_0(x)\|^2=\int_{-1}^{1}dx=2,$$

$$\|P_1(x)\|^2=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3},$$

$$\|P_2(x)\|^2=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\right)^2dx=\frac{2}{5}.$$

Тогда

$$c_0=\frac{1}{2}(f,P_0(x))=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^xdx=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right),$$

$$c_1=\frac{3}{2}(f,P_1(x))=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}e^xxdx=\frac{3}{e},$$

$$c_2=\frac{5}{2}(f,P_2(x))=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}e^x\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)dx=\frac{5}{2}\left(e-\frac{7}{e}\right).$$

Обобщенный ряд Фурье, порожденный функцией

$f(x)=e^x \in L_2[-1;1]$, запишется в виде

$$e^x \sim \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)+\frac{3}{e}x+\frac{5}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)+\ldots$$

Тема 2 Ряды Фурье по тригонометрической системе

1 Разложить на промежутке $[-\pi;\pi]$ в ряд Фурье функции:

а) $f(x)=5x-1$;

в) $f(x)=|\sin 2x|$;

б) $f(x)=3x^2$;

г) $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } -\pi \le x \le 0,\\ 3 & \text{при } \quad 0 < x \le \pi.\end{cases}$

2 Разложить на промежутке $[0;\pi]$ в ряд Фурье по косинусам функции:

а) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при } \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi;\end{cases}$

б) $f(x)=2x+3x^2$.

3 Разложить на промежутке $[0;\pi]$ в ряд Фурье по синусам функции:

а) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2},\\ -x & \text{при } \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi;\end{cases}$

б) $f(x)=6-2x$.

4 Разложить на промежутке $[0;\ln 2]$ в ряд Фурье функцию $f(x)=\operatorname{sh} x$, доопределив ее на $[-\ln 2;0]$ а) четным, б) нечетным способами.

5 Разложить на промежутке $[-1;1]$ в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{при } -1 \le x \le 0,\\ 1-x & \text{при } 0 < x \le 1.\end{cases}$$

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию (рисунок 12)

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{если } -\pi<x<0,\\ 1, & \text{если } 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

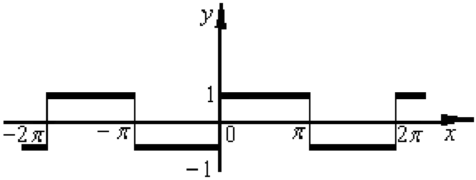

Рисунок 12 – График функции

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{если } -\pi<x<0,\\ 1, & \text{если } 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{\pi}dx\right)=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos n\pi}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, & \text{если } n=2k,\\ \dfrac{4}{\pi n}, & \text{если } n=2k+1,\end{cases}$$

где $k\in\mathbb{N}$.

Таким образом, для рассматриваемой функции ряд Фурье имеет следующий вид:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+...+\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x+...\right).$$

На рисунках 13, 14, 15 изображены графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ соответственно.

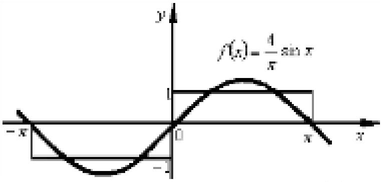

Рисунок 13 – График $S_1(x)$

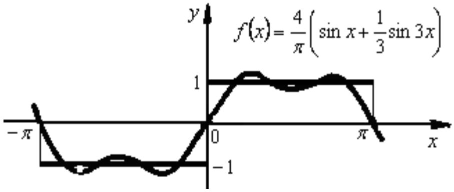

Рисунок 14 – График $S_2(x)$

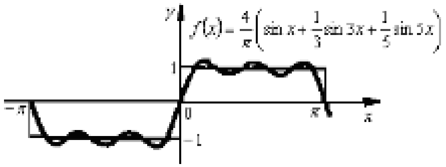

Рисунок 15 – График $S_3(x)$

Видно, как частичные суммы S_n, ряда Фурье все точнее и точнее представляют функцию $f(x)$ при $n \to \infty$.

2 Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$ равенством $f(x)=|x|$.

Решение. Данная функция является чётной (рисунок 16), поэтому её ряд Фурье содержит только косинусы.

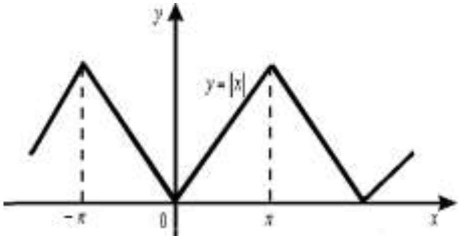

Рисунок 16 – График 2π периодичной функции $f(x)=|x|$

Вычислим коэффициенты этого ряда:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi\ ,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \cos(nx)dx = dv,\ v = \dfrac{1}{n}\sin(nx), \\ u = x,\ \ du = dx \\ \ \end{array}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin x\,dx\right) = \frac{2}{\pi n^2}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\big(\cos(n\pi)-1\big) = \frac{2}{\pi n^2}\big((-1)^n - 1\big) =$$

$$= \begin{cases} 0,\ \text{если} \quad n = 2k, k = 1, 2, \ldots, \\ -\dfrac{4}{\pi n^2},\ \text{если} \quad n = 2k+1, k = 0, 1, \ldots . \end{cases}$$

Следовательно,

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

3 Для функции $f(x) = x$ на интервале $(-l;l)$ (рисунок 17) записать ряд Фурье.

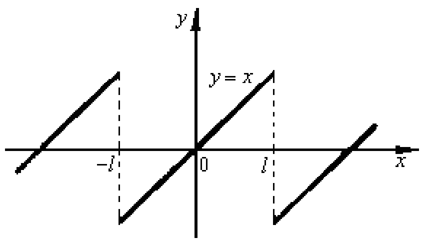

Рисунок 17– График $2l$ -периодической функции $f(x) = x$

Р е ш е н и е . Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x\cos\frac{n\pi x}{l} dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x\sin\frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l}\left(-x\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_{-l}^{l} + \frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l} dx\right) =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}.$$

Следовательно, ряд Фурье, соответствующий функции $f(x) = x$ имеет вид:

$$x \sim \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Так как функция $f(x) = x$ на интервале $(-l;l)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$, но сходимость является не равномерной, а поточечной (во всех внутренних точках отрезка $[-l;l]$). На концах этого отрезка ряд Фурье не является сходящимся к $f(x)$, поскольку, согласно теореме 2, его сумма

$$S(-l) = S(l) = \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2} = 0.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$x = \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l} \quad \forall x \in (-l;l).$$

4 Разложить функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0;\pi]$ в тригонометрический ряд Фурье а) по косинусам, б) по синусам.

Решение. а) продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi;0]$ четным образом, т. е. построим вспомогательную функцию $f^*(x)$, определенную на $[-\pi;\pi]$ следующим образом: $f^*(x) = |x|$.

Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)$$

Откуда

$$a_n=\begin{cases}0, & \text{если } n=2k,\\ -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, & \text{если } n=2k-1.\end{cases}$$

Таким образом,

$$f^*(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left((2k-1)x\right)\quad \forall x\in[-\pi;\pi]$$

или $\forall x\in[0;\pi]$

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos x-\frac{4}{9\pi}\cos 3x-\frac{4}{25\pi}\cos 5x-\ldots;$$

б) продолжим функцию $f(x)=x$ теперь на отрезок $[-\pi;0]$ нечетным образом, т.е. построим вспомогательную функцию $f^*(x)=x$, $|x|<\pi$. Вычислим коэффициенты Фурье b_n (так как для нечетной функции $a_0=a_n=0$):

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nxdx=\frac{2}{n}(-1)^{n-1}.$$

Тогда $\forall x\in[0;\pi]$

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx=2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\ldots.$$

Раздел 2 **Функции комплексной переменной**

Тема 1 Функции комплексной переменной

1 Найти пределы последовательностей:

а) $z_n = \dfrac{i^n}{n}$; б) $z_n = n \sin \dfrac{i}{n}$.

2 Найти действительную и мнимую части функций:

а) $w = \sin z$; д) $w = \operatorname{sh} z$;

б) $w = \dfrac{\overline{z}}{i} + \dfrac{i}{\overline{z}}$; е) $w = i\,\overline{z} + 2z^2$;

в) $w = 2z - 1$; ж) $w = z + z^2$;

г) $w = z^{-1}$; и) $w = e^{-z}$.

3 Найти значение модуля и главное значение аргумента функций в точках:

а) $w = \cos z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2} + i \ln 2$; в) $w = \operatorname{th} z$, $z_0 = \pi i$;

б) $w = z e^z$, $z_0 = \pi i$; г) $w = 3^z$, $z_0 = 2 - i$.

4 Найти все значения функции $w = f(z)$ в точке z_0:

а) $w = z + \sqrt[4]{z}$, $z_0 = -1$; б) $w = \dfrac{\sqrt{z} + i}{\sqrt{z} - i}$, $z_0 = i$.

5 Вычислить значения функций в точках:

а) $\operatorname{Ln} e$; д) $\operatorname{Ln}(-1-i)$; к) $\operatorname{Ln}(2+i)$;

б) $\operatorname{Arcsin} i$; е) $\operatorname{sh} \dfrac{\pi i}{3}$; л) $\operatorname{th} \pi i$;

в) i^i; ж) 1^i; м) $(1-i)^{3-3i}$;

г) $e^{\frac{\pi}{4} i}$; и) $\cos \pi i$; н) $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2} i$.

6 Решить уравнения:

а) $e^{-z} + 1 = 0$; б) $4 \cos z + 5 = 0$.

7 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{z \to -i} \dfrac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}$; б) $\lim\limits_{z \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz + \operatorname{sh} iz}$.

8 Исследовать на непрерывность функцию $w = \overline{z}$.

П р и м е р ы   о ф о р м л е н и я   р е ш е н и я

1 Вычислить пределы последовательностей:

а) $z_n = \dfrac{n^2 + i\,n - 2i + 4}{i\,n^2 - 5n + 4i}$;   б) $z_n = n\,\mathrm{tg}\dfrac{i}{n}$.

Р е ш е н и е . а) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 + i\,n - 2i + 4}{i\,n^2 - 5n + 4i} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1 + + \dfrac{i}{n} + \dfrac{-2i+4}{n^2}\right)}{n^2\left(i - \dfrac{5}{n} + \dfrac{4i}{n^2}\right)} = \frac{1}{i} = -i;$$

б) имеем

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{tg}\frac{i}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{tg}\dfrac{i}{n}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{i}{n}}{\dfrac{i}{n}}\cdot\frac{i}{\cos\dfrac{i}{n}} = 1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{i}{\cos\dfrac{i}{n}} = i.$$

2 Найти значение модуля функции $w = \sin z$ в точке $z_0 = \pi + i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$.

Р е ш е н и е . Пусть $z = x + iy$. Тогда

$w = \sin z = \sin\left(x + iy\right) = \sin x\cos iy + \cos x \sin iy =$

$= \sin x\,\mathrm{ch}\,y + i\,\mathrm{sh}\,y\cos x$.

Отсюда

$$\mathrm{Re}\left(\sin z\right) = \sin x\,\mathrm{ch}\,y,$$

$$\mathrm{Im}\left(\sin z\right) = \mathrm{sh}\,y\cos x.$$

Тогда модуль функции $w = \sin z$ равен

$\left|\sin z\right| = \sqrt{\sin^2 x\,\mathrm{ch}^2 y + \mathrm{sh}^2 y\cos^2 x} =$

$= \sqrt{\sin^2 x\,\mathrm{ch}^2 y + \mathrm{sh}^2 y\left(1 - \sin^2 x\right)} =$

$= \sqrt{\sin^2 x\left(\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y\right) + \mathrm{sh}^2 y} = \sqrt{\sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y}$.

Подставляя $z_0 = \pi + i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$, получим

$\left|\sin\left(\pi + i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)\right| = \sqrt{\sin^2\pi + \mathrm{sh}^2\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)} =$

$$= \operatorname{sh}\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) = \frac{e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} - e^{-\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}}{2} =$$

$$= \frac{\left(2+\sqrt{5}\right)^2 - 1}{2\left(2+\sqrt{5}\right)} = \frac{4+4\sqrt{5}+5-1}{2\left(2+\sqrt{5}\right)} = \frac{8+4\sqrt{5}}{2\left(2+\sqrt{5}\right)} = 2 .$$

Видно, что тригонометрические функции комплексной переменной могут принимать значения по модулю больше единицы.

3 Найти значение модуля и главное значение аргумента функции $w = \operatorname{ch} z$ в точке $z_0 = i$.

Решение. Имеем $\operatorname{ch} i = \cos 1$. Тогда значение модуля функции $w = \operatorname{ch} z$ в точке $z_0 = i$ равно

$$\left|\operatorname{ch} i\right| = \sqrt{\left(\cos 1\right)^2 + 0^2} = \cos 1,$$

а главное значение аргумента –

$$\arg\left(\operatorname{ch} i\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{\cos 1}\right) = 0 .$$

4 Найти все значения функции $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{z}$ в точке $z_0 = i$.

Решение. Для извлечения корня n-ой степени из комплексного числа z воспользуемся формулой Муавра в показательной форме:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i(\varphi + 2k\pi)}{n}}, \ k = 0, 1, 2, ..., n-1 .$$

Так как показательная форма комплексного числа $z_0 = i$ равна $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, то $\sqrt{i} = e^{\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}$, $k = 0, 1$.

Тогда функция в точке $z_0 = i$ принимает два значения:

$$w_1 == \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\frac{\pi}{4}i}, \ w_1 == \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

5 Вычислить значения функции в точке:

а) $\operatorname{Ln}(-1)$; б) $\operatorname{Arctg}(1-i)$.

Решение. а) имеем $z_0 = -1$; $\left|z_0\right| = 1$; $\arg z_0 = \pi$.

Тогда

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i\pi + 2\pi ki = i\pi + 2\pi ki = i\pi(1+2k), \ k \in \mathbb{C};$$

б) по свойствам обратных тригонометрических функций имеем

$$\operatorname{Arctg}(1-i) = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{2+i}{-i} = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}(2i-1).$$

Для числа $2i-1$ модуль и главное значение аргумента есть

$$|2i-1| = \sqrt{5},$$

$$\arg(2i-1) = \pi - \operatorname{arctg} 2.$$

Найдем

$$\operatorname{Ln}(2i-1) = \ln\sqrt{5} + i(\pi - \operatorname{arctg} 2) + 2k\pi i =$$

$$= \ln\sqrt{5} - i\operatorname{arctg} 2 + (2k+1)\pi i, \ k \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$\operatorname{Arctg}(1-i) = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 - \frac{i}{2}\ln\sqrt{5} + \frac{\pi}{2}(2k+1), \ k \in \mathbb{C}.$$

6 Найти область однолистности функции $w = z^2$.

Решение. Возьмем на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ две различные точки z_1 и z_2, заданные в показательной форме:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

Из условия однолистности

$$r_1^2 e^{2i\varphi_1} = r_2^2 e^{2i\varphi_2}$$

находим $r_1 = r_2$, $2\varphi_2 = 2\varphi_1 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{C}$.

Очевидно, при $k = 0$ получим $\varphi_2 = \varphi_1$, т. е. $z_1 = z_2$.

Так как $z_1 \neq z_2$, то $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi k$, $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Таким образом, область однолистности функции $w = z^2$ не должна содержать внутри себя точек, модули которых совпадают, а аргументы отличаются на π.

7 Вычислить предел $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\cos z}{\operatorname{ch} iz}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{z\to 0}\frac{\cos^2 z}{\operatorname{ch} iz} = \quad \operatorname{ch} iz = \cos z \quad = \lim_{z\to 0}\frac{\cos^2 z}{\cos z} = \lim_{z\to 0}\cos z = 1.$$

Тема 2 Аналитические функции. Условия Коши-Римана

1 Выяснить, в каких точках дифференцируемы функции:

а) $w = z^2 \cdot \overline{z}$; в) $w = e^{z^2}$;

б) $w = |z| \cdot \overline{z}$; г) $w = |z-1|^2$.

2 Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

а) $w = \operatorname{sh} z$; б) $w = \ln z^2$.

3 Найти области аналитичности функций:

а) $w = \operatorname{tg} z$; г) $w = \dfrac{z\cos z}{1+z^2}$;

б) $w = z e^{-z}$; д) $w = \operatorname{cth} z$;

в) $w = \sin z + \overline{z}$; е) $w = z \ln z$.

4 Проверить гармоничность функций:

а) $u = x^2 + 2x - y^2$; в) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; д) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

б) $u = x^2 - y^2 + 2xy$; г) $v = \ln\left(x^2+y^2\right)$; е) $v = 2e^x \sin y$.

5 Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ части:

а) $u = x^2 - y^2 + 2x$ при условии $f(i) = 2i - 1$;

б) $v = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy)$ при условии $f(0) = 0$;

в) $v = 2\cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2$ при условии $f(0) = 2$.

г) $u(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos 2xy$;

д) $u(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

е) $v(x,y) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$.

6 Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображениях $w = f(z)$ в указанных точках:

а) $w = e^z$, $z_1 = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{4}$; $z_2 = -1 - i\dfrac{\pi}{2}$;

б) $w = z^2$, $z_1 = 2 - i$; $z_2 = 1 + i\dfrac{\pi}{2}$.

7 Найти области растяжения и сжатия при отображениях:

а) $w = e^z$; б) $w = \dfrac{1}{z}$.

8 Найти области конформности функций:

а) $w = 2z$; б) $w = e^{-3z}$; в) $w = -iz^2$.

9 Найти образы окружности $x^2 + y^2 = 2x$ при отображениях:

а) $w = z + 1$; б) $w = \dfrac{1}{z}$; в) $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = \overline{z}$.

Р е ш е н и е . Функция $f(z) = \overline{z}$ непрерывна на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Она может быть представлена в виде

$$f(z) = x - iy.$$

Тогда при любом z имеем

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Приращение Δz может стремиться к нулю по любому направлению. Выбирая для Δz два различных направления, получим два различных значения отношения:

– если $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \dfrac{\Delta x - 0i}{\Delta x + 0i} = 1$;

– если $\Delta x = 0$, $\Delta y \neq 0$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \dfrac{0 - i\Delta y}{0 + i\Delta y} = -1$.

Следовательно, предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ не существует.

Функция $f(z) = \overline{z}$ непрерывная на всей комплексной плоскости не имеет производной ни в одной точке плоскости.

2 Исследовать функцию $w = z^2$ на дифференцируемость и найти ее производную.

Р е ш е н и е . Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$z^2 = (x + iy)^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2ixy.$$

Следовательно, $u(x;y)=x^2-y^2$, $v(x;y)=2xy$.

Условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

выполняются в любой точке $(x;y)$.

Значит, функция $w=z^2$ дифференцируема на всей комплексной плоскости.

Тогда

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+2iy=2(x+iy)=2z.$$

3 Найти аналитическую функцию $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$, если $v(x;y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$ при условии $f(0)=0$.

Решение. Частные производные первого и второго порядков функции $v(x;y)$ равны:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+12xy-3y^2,\ \frac{\partial v}{\partial y}=6x^2-6xy-6y^2;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=6x+12y,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-6x-12y.$$

Функция $v(x;y)$ является гармонической на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, так как

$$\frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial y^2}=0.$$

Тогда существует функция $u(x;y)$, сопряженная к функции $v(x;y)$. Проинтегрируем 1-е условие Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ по переменной x:

$$u(x;y)=\int\left(6x^2-6xy-6y^2\right)dx,$$

$$u(x;y)=2x^3-3x^2y-6xy^2+C(y).$$

Дифференцируя последнее равенство по переменной y и подставляя во 2-е условие Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, получим

$$-3x^2 - 12xy + C'(y) = -\left(3x^2 + 12xy - 3y^2\right).$$

Отсюда $C'(y) = 3y^2$. Интегрируя по y, получим

$$C(y) = y^3 + C,\ C = \text{const}.$$

Тогда аналитическая функция имеет вид

$$f(z) = \left(2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3 + C\right) + i\left(x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3\right).$$

Из условия $f(0) = 0$ находим постоянную C: $C = 0$.

Искомая функция примет вид

$$f(z) = \left(2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3\right) + i\left(x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3\right) =$$

$$= (x + iy)^3 \cdot (2 + i) = (2 + i)z^3.$$

4 Выяснить геометрическую картину отображения, осуществляемого функцией $w = 5z$.

Решение. Поскольку $w' = 5 \neq 0$, то отображение $w = 5z$ является конформным во всех точках плоскости $\mathbb{C}$.

Модуль производной $\left|f'(z_0)\right| = 5 > 1$, значит, происходит растяжение при отображении $w = 5z$.

Аргумент производной равен $\arg f'(z) = 0$, поэтому направление при отображении не меняется.

5 Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w = z^2$ в точке $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Решение. Имеем $w'(z) = 2z$. Тогда

$$w'\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Так как

$$\left|f'\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)\right| = 4 > 0,$$

$$\arg f'\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)=\frac{\pi}{4}>0\ ,$$

то при отображении $w=z^2$ происходит растяжение с коэффициентом, равным 4, и поворот против часовой стрелки на угол, равный $\frac{\pi}{4}$.

6 Найти область D', в которую функция $w=z^2$ отображает круг $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$.

Решение. Функция $w=z^2$ является аналитической всюду в плоскости $\mathbb{C}$. Введем полярные координаты

$$x=r\cos\varphi\ ,\ \ y=r\sin\varphi\ .$$

Тогда отображение $w=z^2$ в тригонометрической форме запишется в виде

$$w=r^2\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^2 \text{ или } w=r^2\left(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi\right).$$

Найдем уравнение окружности $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ в полярных координатах:

$$\left|r\cos\varphi+ir\sin\varphi-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{\left(r\cos\varphi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(r\sin\varphi\right)^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{r^2-r\cos\varphi+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\Rightarrow r^2-r\cos\varphi+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow r=\cos\varphi\ ,$$

т. е. уравнение окружности $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ в полярных координатах $r,\ \varphi$ принимает вид $r=\cos\varphi$.

Обозначим через $\rho,\ \theta$ полярные координаты в плоскости W. Тогда справедливы равенства

$$\rho=r^2\ ,\ \theta=2\varphi\ .$$

При отображении $w=z^2$ окружность $r=\cos\varphi$ переходит в кардиоиду

$$\rho=\cos^2\frac{\theta}{2} \text{ или } \rho=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\ ,$$

при этом сохраняется направление обхода окружности $r = \cos\varphi$ и кардиоиды $\rho = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)$.

На основании принципа взаимно однозначного соответствия границ заключаем, что функция $w = z^2$ осуществляет конформное отображение внутренности рассматриваемой окружности на внутренность кардиоиды (рисунок 18).

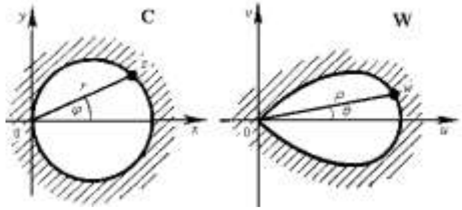

Рисунок 18 – Рисунок к типовому примеру 6

Тема 3 Интегрирование функции комплексной переменной

Вычислить интегралы:

1 $\int\limits_{\Gamma}\left(\left(y+1\right)-xi\right)dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 1$, $z_2 = -i$.

2 $\int\limits_{\Gamma}\overline{z}\,\mathrm{Re}\,z dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = -2-i$, $z_2 = 1+2i$.

3 $\int\limits_{\Gamma}\left(1+i-2\overline{z}\right)dz$, где Γ – парабола $y = x^2$, соединяющая точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1+i$.

4 $\int\limits_{\Gamma}\left(z^2+z\overline{z}\right)dz$, где Γ – дуга окружности $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$.

5 $\int\limits_{1+i}^{2-i}\left(3z^2+2z\right)dz$.

6 $\int\limits_{0}^{i} z\cos z dz$.

7 $\int\limits_{\Gamma}\mathrm{Re}\,z dz$, где Γ есть кривая $z = \left(2+i\right)t$, $0 \le t \le 1$.

8 $\int\limits_{\Gamma}\left(iz^2-2ze^{z^2}\right)dz$, где Γ – произвольная линия, соединяющая точки $z_1=e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_2=i$.

9 $\int\limits_{\Gamma}\left(1+2i-2\bar{z}\right)dz$, где Γ – ломаная $z_1z_2z_3$, где $z_1=0$, $z_2=1+i$, $z_3=1$.

10 $\int\limits_{c} z\operatorname{Im}z^2dz$, где Γ есть $|z|=1$ $\left(-\pi\le\arg z\le 0\right)$.

11 $\int\limits_{1+i}^{-1-i}\left(2z+1\right)dz$.

12 $\int\limits_{\Gamma}\ln zdz$, где Γ есть $|z|=1$, обход против часовой стрелки.

13 $\int\limits_{0}^{i+1}z^3dz$.

14 $\int\limits_{\Gamma}\operatorname{Im}zdz$, где Γ есть $z=\left(2+3i\right)t$ $\left(0\le t\le 1\right)$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить интегралы

а) $\int\limits_0^i z^2dz$; б) $\oint\limits_{|z-z_0|=R}\left(z-z_0\right)^n dz$ при $n\ne 1$; в) $\int\limits_{|z-z_0|=R}\frac{dz}{z-z_0}$.

Решение. а) по формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int\limits_0^i z^2dz=\left.\frac{z^3}{3}\right|_0^i=-\frac{i}{3};$$

б) параметрические уравнения окружности с центром в точке z_0 имеют вид:

$$\begin{cases} x=x_0+R\cos t, \\ y=y_0+R\sin t. \end{cases}$$

Отсюда комплексно-параметрическое уравнение окружности есть

$$z=z_0+R\cdot e^{it},\ 0\le t\le 2\pi .$$

Тогда получим:

$$\int\limits_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n\,dz = \left| z = z_0 + R\cdot e^{it} \right| = \int\limits_0^{2\pi} \left(R\cdot e^{it}\right)^n R\cdot i\cdot e^{it}dt =$$

$$= i\cdot R^{n+1}\cdot \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt = i\cdot R^{n+1}\cdot \left.\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{R^{n+1}}{n+1}\cdot\left(\cos 2\pi(n+1) + i\sin 2\pi(n+1) - e^0\right) = \frac{R^{n+1}}{n+1}(1-1) = 0\ ;$$

в) имеем:

$$\int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-z_0} = \left| z = z_0 + R\cdot e^{it} \right| = \int\limits_0^{2\pi} \frac{iR\cdot e^{it}}{R\cdot e^{it}}dt = i\cdot \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i\ .$$

2 Вычислить $\int\limits_\Gamma \left(\overline{z} + z^2\right)dz$, где Γ – отрезок прямой $y = x$, соединяющий точки $z_0 = 0$ и $z_1 = 1+i$.

Решение. 1 способ. Так как контур интегрирования – прямая $y = x$, сделаем замену $z = re^{i\varphi}$. Тогда

$$\overline{z} = re^{-i\varphi},\ z^2 = r^2e^{2i\varphi},$$

где φ является постоянным и $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Таким образом,

$$z = re^{i\frac{\pi}{4}},\ \overline{z} = re^{-i\frac{\pi}{4}},\ z^2 = r^2e^{i\frac{\pi}{2}};\ dz = e^{i\frac{\pi}{4}}dr\ .$$

В точке $z_0 = 0$ имеем $r = 0$, а в точке $z_1 = 1+i$ получим:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}\ .$$

Тогда получим:

$$\int\limits_\Gamma \left(\overline{z} + z^2\right)dz = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(re^{-i\frac{\pi}{4}} + r^2e^{i\frac{\pi}{2}} \right) e^{i\frac{\pi}{4}}dr = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(r + r^2e^{i\frac{3}{4}\pi} \right)dr =$$

$$= \left.\left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3}e^{i\frac{3}{4}\pi} \right)\right|_0^{\sqrt{2}} = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi \right) =$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i\ .$$

2 способ. Выделим действительную и мнимую части исходной функции:

$$\overline{z}+z^2=x-iy+x^2-y^2+2xyi=\left(x+x^2-y^2\right)+i\left(2xy-y\right).$$

Отсюда

$$u\left(x,y\right)=x+x^2-y;$$

$$v\left(x,y\right)=2xy-y.$$

Тогда получим

$$\int\limits_{\Gamma}\left(\overline{z}+z^2\right)dz=\int\limits_{\Gamma}\left(x+x^2-y^2\right)dx-\left(2xy-y\right)dy+$$

$$+i\int\limits_{C}\left(2xy-y\right)dx+\left(x+x^2-y^2\right)dy=\left[\begin{matrix} y=x; & x_0=0 \\ dy=dx; & x_1=1\end{matrix}\right]=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x+x^2-x^2-2x^2+x\right)dx+i\int\limits_0^1\left(2x^2-x+x+x^2-x^2\right)dx=$$

$$=2\int\limits_0^1\left(x-x^2\right)dx+2i\int\limits_0^1 x^2dx=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1+2i\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}i=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i.$$

3 Вычислить $\int\limits_{\Gamma}\left(z^2-z\right)dz$, где Γ – часть окружности $\left|z\right|=1$, расположенная в верхней полуплоскости.

Решение. Положим $z=re^{i\varphi}$. Так как $\left|z\right|=1$, то $r=1$ и $z=e^{i\varphi}$. Тогда $dz=ie^{i\varphi}d\varphi$ и $0\le\varphi\le\pi$ по условию.

Тогда получим

$$\int\limits_{\Gamma}\left(z^2-z\right)dz=\int\limits_0^{\pi}\left(e^{2i\varphi}-e^{i\varphi}\right)ie^{i\varphi}d\varphi=i\int\limits_0^{\pi}\left(e^{3i\varphi}-e^{2i\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=i\left(\frac{1}{3i}e^{3i\varphi}-\frac{1}{2i}e^{2i\varphi}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{3}\left(e^{3\pi i}-1\right)-\frac{1}{2}\left(e^{2\pi i}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\cos 3\pi+i\sin 3\pi-1\right)-\frac{1}{2}\left(\cos 2\pi+i\sin 2\pi-1\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-1-1\right)-\frac{1}{2}\left(1-1\right)=-\frac{2}{3}.$$

4 Вычислить $\int\limits_{\Gamma} e^{\overline{z}}\,dz$, где Γ – отрезок прямой $y=-x$, соединяющей точки $z_1=0$ и $z_2=\pi-i\pi$

Решение. Параметрические уравнения контура Γ есть $x=t$, $y=-t$ или $z=t-it$, где действительное t изменяется от 0 до π. Тогда имеем

$$\int\limits_{\Gamma} e^{\overline{z}}\,dz=\int\limits_0^{\pi} e^{t+it}(1-i)\,dt=(1-i)\int\limits_0^{\pi} e^{t(1+i)}dt=\frac{1-i}{1+i}e^{t(1+i)}\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1-i}{1+i}\left(e^{\pi(1+i)}-1\right)=\frac{(1-i)^2}{2}\left(e^{\pi}e^{\pi i}-1\right)=$$

$$=\frac{1-2i-1}{2}\left(e^{\pi}(\cos\pi+i\sin\pi)-1\right)=-i\left(e^{\pi}(-1+i\cdot 0)-1\right)=$$

$$=\left(e^{\pi}+1\right)i.$$

5 Вычислить $\int\limits_{1-i}^{2+i}(2z+3)\,dz$.

Решение. Функция $f(z)=2z+3$ аналитична всюду на $\mathbb{C}$. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int\limits_{1-i}^{2+i}(2z+3)\,dz=\left(z^2+3z\right)\Big|_{1-i}^{2+i}=(2+i)^2+3(2+i)-$$

$$(1-i)^2-3(1-i)==4+4i-1+6+3i-1+2i+1-3+3i=6+12i.$$

Тема 4 Интегральная формула Коши

Вычислить интегралы (обход по контуру в положительном направлении):

1 $\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2+2z}dz$.

8 $\oint\limits_{|z-1|=2}\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}dz$.

2 $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2-2z}dz$.

9 $\oint\limits_{|z|=5}\frac{dz}{z^2+16}$.

3 $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$.

4 $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^3} \cos\frac{\pi}{z+1} dz$.

5 $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z e^{\frac{1}{z+2}}} dz$.

6 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z}{\left(z^2-1\right)^2} dz$.

7 $\oint\limits_{|z-i|=4} \frac{e^{z+1}}{(z-1)^2 \cdot (z+2)} dz$.

10 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z}{\left(z^2-1\right)^2} dz$.

11 $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{\left(z^2+4\right)^2} dz$.

12 $\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z dz}{(z-2)^3 (z+4)}$.

13 $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{e^{z^2}}{z-1} dz$.

14 $\oint\limits_{|z+i|=3} \frac{\sin\frac{i\pi z}{2}}{(z-2) z^2} dz$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz$, если Γ есть окружность, определяемая уравнением:

а) $|z-2|=1$; б) $|z-2|=3$; в) $|z-2|=5$.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ будут точки, обращающие в нуль знаменатель, т. е. $z^2-6z=0$. Решая уравнение, получим две особые точки $z_1=0$, $z_2=6$.

а) внутри области D, ограниченной окружностью $|z-2|=1$, нет особых точек функции $f(z)$, т. е. $f(z)$ аналитична в области D. В силу теоремы Коши имеем

$$\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz = 0;$$

б) внутри области, ограниченной окружностью $|z-2|=3$, лежит точка $z_1=0$. По интегральной формуле Коши имеем:

$$\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz = 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z-6}\Big|_{z=0} =$$

$$2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3};$$

в) в области, ограниченной окружностью $|z-2|=5$, лежат обе особые точки: $z_1 = 0$ и $z_2 = 6$. Непосредственно применять интегральную формулу Коши нельзя. Вычислить данный интеграл можно двумя способами.

__1 способ__ Разложим дробь $\frac{1}{z^2-6z}$ на простейшие:

$$\frac{1}{z^2-6z} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z-6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z}.$$

Подставляя в интеграл и применяя интегральную формулу Коши, получим:

$$\oint\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \frac{1}{6}\oint\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z-6}dz - \frac{1}{6}\oint\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z}dz =$$

$$= \frac{1}{6} 2\pi i e^{z^2}\Big|_{z=6} - \frac{1}{6} 2\pi i e^{z^2}\Big|_{z=0} = \frac{\pi i}{3}\left(e^{36}-1\right).$$

__2 способ__ Построим окружности γ_1 и γ_2 с центрами в точках $z_1 = 0$ и $z_2 = 6$ малых радиусов таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали в круге $|z-2| \le 5$. В трехсвязной области, ограниченной окружностями $|z-2|=5$, γ_1 и γ_2 подынтегральная функция аналитична всюду. По теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\oint\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz + \oint\limits_{\gamma_2} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz =$$

$$= 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\Big|_{z=0} + 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z}\Big|_{z=6} = = -\frac{\pi i}{3} + \frac{\pi i}{3}e^{36} = \frac{\pi i}{3}\left(e^{36}-1\right).$$

2 Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz$, где окружность обходится в положительном направлении.

Решение. Внутри области, ограниченной окружностью $|z| = 1$, находится точка $z = 0$, в которой знаменатель функции $f(z) = \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2 + 2z}$ обращается в нуль.

Перепишем заданный интеграл так

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2 + 2z} d\zeta = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z+2}}{z}.$$

Функция $f(z) = \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z+2}$ является аналитической в круге $|z| \leq 1$. Применяя интегральную формулу Коши в точке $z_0 = 0$ получим:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i.$$

3 Вычислить интегралы

а) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{\left(z^2 - 1\right)^2} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$.

Решение. а) особые точки функции $z_1 = 1,\ z_2 = -1$. В области $|z-1| \leq 1$ лежит точка $z_1 = 1$.

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{\left(z^2 - 1\right)^2} = \frac{\sin \pi z}{(z-1)^2 (z+1)^2} = \frac{\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}.$$

Подставляя, получим:

$$\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{\left(z^2-1\right)^2} dz = \oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\dfrac{\sin \pi z}{\left(z+1\right)^2}}{\left(z-1\right)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{\sin \pi z}{\left(z^2+1\right)^2}\right)'\Bigg|_{z=1} =$$

$$= 2\pi i \frac{2\pi \cos \pi - 2\sin \pi}{2^3} = 2\pi i \cdot \frac{\left(-2\pi\right)}{8} = -\frac{\pi^2 i}{2};$$

б) подынтегральная функция $f\left(z\right) = \dfrac{\cos z}{z^3}$ является аналитической в области $|z| \le 1$ всюду, кроме точки $z = 0$. Функция $f\left(z\right) = \cos z$ является всюду аналитической в круге $|z| \le 1$. При $n = 2$ имеем

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''\left(0\right).$$

Так как $f''\left(z\right) = -\cos z$ и $f''\left(0\right) = -1$, то $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\cos z}{z^3} dz = \pi \cdot i \cdot \left(-1\right) = -\pi \cdot i$.

Тема 5 Ряды аналитических функций

1 Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos ik}{2^k}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos ik^2}{5^{k^2}}$; ж) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sh} i\sqrt{k}}{\sin ik}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{e^{i\frac{\pi}{k}}}{\sqrt{k}}$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{ch} i\dfrac{\pi}{k}}{k^{\ln k}}$; и) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin ik}{2^k}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{e^{ik^2}}{k^3}$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{2+i}{3}\right)^k$; к) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{i^k}{k}$.

2 Найти области сходимости и область равномерной сходимости функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(-1\right)^k \dfrac{\left(z-1\right)^k}{k^2}$; г) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{z}{1-i}\right)^k$; ж) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{\left(1+i\right)^k}$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+i)z^k$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\operatorname{ch}\dfrac{i}{k}z^k$; и) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{ik}z^k$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\cos^k\left(\dfrac{\pi i}{\sqrt{k}}\right)z^k$; е) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{i^k}$; к) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{-z}$.

Примеры оформления решения

1 Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{ik}}{k^2}$.

Решение. По формуле Эйлера общий член ряда можно записать в виде

$$e^{ik} = \cos k + i\sin k .$$

Рассмотрим два ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k}{k^2} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k^2}$$

Так как $\dfrac{|\cos k|}{k^2}\le\dfrac{1}{k^2}$ и $\dfrac{|\sin k|}{k^2}\le\dfrac{1}{k^2}$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$ сходится, то оба ряда сходятся. Значит, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{ik}}{k^2}$ сходится.

2 Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k$.

Решение. Каждый коэффициент ряда равен 1, поэтому радиус сходимости $R=1$. Заданный ряд является рядом геометрической прогрессии, для которого

$$S_n(z)=1+(z-z_0)+\ldots+(z-z_0)^n=\frac{1-(z-z_0)^{n+1}}{1-(z-z_0)} .$$

Поэтому сумма ряда есть аналитическая функция

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}S_n(z)=\frac{1}{1-(z-z_0)} .$$

3 Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(z-i)^k} .$$

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Так как

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)(z-i)^k}{k(z-i)^{k+1}}\right| = \frac{1}{|z-i|},$$

то согласно признаку д’Аламбера ряд сходится абсолютно при условии $\dfrac{1}{|z-i|} < 1$. Отсюда $|z-i| > 1$. Значит, ряд сходится абсолютно вне круга с центром в точке $z_0 = i$ радиуса 1. При $|z-i| = 1$ имеем расходящийся числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k$.

4 Найти область точечной и равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^k - z^{k+1}\right).$$

Р е ш е н и е. Составим частичные суммы ряда

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n}\left(z^k - z^{k+1}\right) = 1 - z^{n+1}.$$

Предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - z^{n+1}\right)$ существует только при $|z| < 1$ и в точке $z = 1$. Поэтому областью точечной сходимости ряда является область $D = \left\{ z \mid |z| < 1 \text{ и } z = 1 \right\}$ и сумма ряда в каждой точке этой области равна

$$S(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } |z| < 1, \\ 0 & \text{при } z = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим остаток ряда

$$r_n(z) = S(z) - S_n(z) = \begin{cases} z^{n+1} & \text{при } |z| < 1, \\ 0 & \text{при } z = 1. \end{cases}$$

В силу произвольности ε_0, положим $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4}$. Возьмем последовательность точек $z_n = 2^{-\frac{1}{n+1}} e^{-i\varphi_n}$ таких, что $z_n \in D$ и $\forall\ \varphi_n \in \mathbb{R}$. Так как

$$|r_n(z_n)| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4},$$

то по определению равномерной сходимости неравенство $|r_n(z)| < \varepsilon$ выполняется не для любого $z \in D$.

Значит, в области D функциональный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(z^k - z^{k+1}\right)$ сходится неравномерно.

5 Найти область сходимости и область равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(z-i)^k}{(k+1)^2\,2^k}$.

Решение. Радиус сходимости есть

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}(k+2)^2}{(k+1)^2\,2^k}\right| = 2.$$

Следовательно, ряд сходится в круге $|z-i| < 2$. На границе круга при $|z-i| = 2$ получим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(k+1)^2}$, который является сходящимся. Поэтому исходный ряд сходится в замкнутом круге $|z-i| \le 2$.

Для всех z из круга сходимости $|z-i| \le 2$ имеем:

$$\left|\frac{(z-i)^k}{(k+1)^2\,2^k}\right| \le \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(z-i)^k}{(k+1)^2\,2^k}$ сходится абсолютно и равномерно в круге $|z-i| \le 2$.

6 Найти радиус сходимости и область равномерной сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\cos ik\, z^k$; б) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(1+i)^k\, z^k$.

Решение. а) преобразуем коэффициенты ряда

$$c_k = \cos ik = \frac{e^k + e^{-k}}{2} = \operatorname{ch} k.$$

Тогда радиус сходимости равен

$$R = \lim_{k\to\infty}\frac{|c_k|}{|c_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{ch} k}{\operatorname{ch}(k+1)} = \lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{ch} k}{\operatorname{ch} k\operatorname{ch}1 + \operatorname{sh} k\operatorname{sh}1} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}1 + \operatorname{th} k \operatorname{sh}1} = \frac{1}{\operatorname{sh}1 + \operatorname{ch}1} = e^{-1}.$$

Здесь учитывалось, что

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{th} k = \lim_{k\to\infty} \frac{e^k - e^{-k}}{e^k + e^{-k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1 - e^{-2k}}{1 + e^{-2k}} = 1.$$

Следовательно, $R = e^{-1}$ и область равномерной сходимости ряда есть $|z| < e^{-1}$;

б) коэффициенты ряда $c_k = (1+i)^k$. Тогда

$$|c_k| = \left|(1+i)^k\right| = |1+i|^k = \left(\sqrt{2}\right)^k = 2^{\frac{k}{2}}.$$

Отсюда

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{2^{\frac{k}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, радиус $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и область равномерной сходимости ряда есть $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Тема 6 Ряды Тейлора и Лорана

1 Разложить в окрестности указанных точек в ряд Тейлора и найти его области сходимости функции:

а) $f(z) = \sin(2z+1)$; $z_0 = -1$;

б) $f(z) = e^z$ по степеням $2z-1$;

в) $f(z) = \ln(2-z)$; $z_0 = 0$;

г) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+4z-5}$; $z_0 = 0$;

д) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+i}$; $z_0 = 0$;

и) $f(z) = \cos z$; $z_0 = -\dfrac{\pi}{4}$;

к) $f(z) = \dfrac{1}{3z+1}$; $z_0 = -2$;

л) $f(z) = \cos^2 \dfrac{iz}{2}$; $z_0 = 0$;

м) $f(z) = \operatorname{sh}^2 \dfrac{z}{2}$; $z_0 = 0$;

н) $f(z) = \dfrac{2}{z-1}$; $z_0 = i$;

е) $f(z)=\dfrac{z-1}{2+z-z^2}$; $z_0=0$;

ж) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4z-5}$; $z_0=0$;

о) $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2+2z-3}$; $z_0=0$;

п) $f(z)=e^{z+3}$; $z_0=2$.

2 Разложить в ряд Лорана в окрестности особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$;

б) $f(z)=z^4\cos\dfrac{1}{z}$;

в) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-2}$;

г) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$;

д) $f(z)=\dfrac{z^5}{(z^2-4)^2}$;

е) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$;

ж) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$;

и) $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$;

к) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$;

л) $f(z)=ze^{\frac{1}{z+i}}$;

м) $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$;

н) $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$;

о) $f(z)=\dfrac{2z}{(z+1)(z-2)}$;

п) $f(z)=\dfrac{z-2}{(z+1)z}$.

3 Разложить функции в ряд Лорана:

а) $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(1+z^2)}$ в области $1<|z|<4$;

б) $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$ в области $1<|z|<2$;

в) $f(z)=\dfrac{z^3}{z^2-2z+1}$ в окрестности точек $z_1=0$ и $z_2=1$;

г) $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$ в окрестности точек $z_1=1$ и $z_2=-2$;

д) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+9)z}$ в окрестности точек $z_1=0$ и $z_2=3i$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z}{z^2+2z-3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$ и найти область сходимости ряда.

Р е ш е н и е. Найдем нули знаменателя:

$$z^2+2z-3=0;\ z_1=-3;\ z_2=1.$$

Тогда $z^2+2z-3=(z-1)(z+3)$.

Функцию $f(z)$ можно записать в виде:

$$f(z)=\frac{z}{z^2+2z-3}=\frac{z}{(z-1)(z+3)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z+3}=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-z}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3+z}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-z}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)}.$$

Используя разложение

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\ |z|<1,$$

получим:

$$f(z)=-\frac{1}{4}\left(1+z+\ldots+z^n+\ldots\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{z}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{3^n}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^n}-1\right)z^n.$$

Область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ есть $|z|<1$, а область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n}$ есть $|z|<3$. Поэтому областью сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^n}-1\right)z^n$ является круг $|z|<1$.

2 Разложить по степеням $(z+1)$ функцию $f(z)=e^{2z+1}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем функцию $f(z)$:

$$f(z)=e^{2(z+1)-1}=e^{2(z+1)}\cdot e^{-1}.$$

Используя основное разложение функции e^z в ряд Маклорена, получим:

$$f(z) = e^{-1}\left(1 + 2(z+1) + \frac{2^2(z+1)^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n(z+1)^2}{n!} + \ldots\right) =$$

$$= e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}(z+1)^n .$$

Область сходимости данного ряда $|z| < \infty$.

3 Найти несколько первых членов разложения в ряд по степеням z функции $f(z) = \operatorname{tg} z$.

Р е ш е н и е. Найдем производные функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ в точке $z = 0$:

$$f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z} \text{ или } f'(z) = 1 + f^2(z),$$

$$f''(z) = 2f(z)f'(z),$$

$$f'''(z) = 2\left(f'^2(z) + f(z)f''(z)\right),$$

$$f^{(4)}(z) = 2\left(3f'(z)f''(z) + f(z)f'''(z)\right),$$

$$f^{(5)}(z) = 2\left(3f''^2(z) + 4f'(z)f'''(z) + f(z)f^{(4)}(z)\right).$$

Отсюда

$$f'(0) = 1;\; f''(0) = 0;\; f'''(0) = 2;\; f^{(4)}(0) = 0;\; f^{(5)}(0) = 16, \ldots.$$

Подставляя найденные значения производных в ряд Тейлора, получим:

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{2}{3!}z^3 + \frac{16}{5!}z^5 + \ldots.$$

4 Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ в круге $|z| < 1$.

Р е ш е н и е. Преобразуем функцию $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Так как

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right),\ |z|<2,$$

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}=-\left(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\right),\ |z|<1,$$

то ряд Лорана есть

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)+\left(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots+\frac{2^{n-1}-1}{2^{n+1}}z^n+\cdots.$$

Полученный ряд сходится в круге $|z|<1$.

5 Разложить функцию $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}$ в ряд Лорана в окрестности особой точки $z_0=0$

Решение. Используя основное разложение функции $\sin z$ в ряд Маклорена, получим

$$f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\dots\right)=$$

$$=z-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^3}-\frac{1}{7!z^5}+\dots.$$

Функция является аналитической в кольце $0<|z|<\infty$.

6 Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$$

а) в круге $|z|<1$;

б) в кольце $1<|z|<2$;

в) в области $2<|z|<\infty$.

Решение. Функция $f(z)$ имеет две особые точки $z_1=-2$, $z_2=1$. Представим функцию в виде

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}$$

а) разложение в круге $|z|<1$:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2+z}-\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-z}{2}\right)}-\frac{1}{1-z}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\ldots\right)-\left(1+z+z^2+z^3+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right)z^n .$$

Ряд для первой функции сходится при условии $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, т. е. в области $|z|<2$, для второй – в области $|z|<1$, поэтому ряд для функции $f(z)$ сходится в круге $|z|<1$;

б) разложение в кольце $1<|z|<2$:

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\ldots\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} .$$

Ряд для первой функции сходится, если $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, т. е. при $|z|<2$, для второй функции, если $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, т. е. если $|z|>1$, а ряд для функции $f(z)$ сходится в кольце $1<|z|<2$;

в) разложение для $|z|>2$:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-2}{z}\right)}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-\frac{2^3}{z^3}+\dots\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\dots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n 2^n+1\right)\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Ряд для первой функции сходится в области $\left|\frac{2}{z}\right|<1$, т. е. при $|z|>2$, для второй, если $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, т. е. если $|z|>1$, поэтому ряд для функции $f(z)$ сходится в области $|z|>2$.

7 Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности ее особых точек $f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$.

Решение. Преобразуем функцию:

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}.$$

Разложение в окрестности точки $z_1=0$ по степеням z до ближайшей особой точки $z_2=1$ (в кольце $0<|z|<1$) есть:

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\dots=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n.$$

Разложение в окрестности точки $z_2=1$ по степеням $(z-1)$, справедливо в кольце $0<|z-1|<1$:

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)+1}=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{1-(-(z-1))}=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\dots=$$

$$= -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \ .$$

Тема 7 Классификация изолированных особых точек аналитической функции

1 Найти нули и определить их порядок для функций:

а) $f(z) = z^4 + 4z$; в) $f(z) = \cos z + \operatorname{ch} iz$;

б) $f(z) = z^2 \sin z$; г) $f(z) = (z + \pi i)\operatorname{sh} z$.

2 Найти порядок нуля $z_0 = 0$ для функций:

а) $f(z) = 4\sin z^3 + z^2\left(z^2 - 2\right)$; в) $f(z) = \dfrac{z^4}{z - \sin z}$;

б) $f(z) = 2(\operatorname{ch} z - 1) - z^2$; г) $f(z) = z^2\left(e^{\;^{2}} - 1\right)$.

3 Определить характер особой точки $z_0 = 0$ для функций:

а) $f(z) = \dfrac{1}{z - \sin z}$; в) $f(z) = \dfrac{1}{e^{-z} + z - 1}$;

б) $f(z) = \dfrac{1}{2 + z^2 - \operatorname{ch} z}$; г) $f(z) = \dfrac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}$.

4 Найти особые точки и определить их характер для функций:

а) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$; д) $f(z) = \cos\dfrac{1}{z}$;

б) $f(z) = \sin\dfrac{\pi}{z+1}$; е) $f(z) = \dfrac{1 - e^{-z}}{z}$;

в) $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$; ж) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2 - 2z + 1}$;

г) $f(z) = \sin\dfrac{1}{z^2}$; и) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + 2z + 1}$.

5 Определить характер указанных особых точек для функций:

а) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}$, $z_0 = -1$;

б) $f(z) = \cos\dfrac{1}{z + \pi}$, $z_0 = -\pi$.

П р и м е р ы   о ф о р м л е н и я   р е ш е н и я

1 Найти нули и определить их порядок функции

$$f(z)=1+\cos z .$$

Р е ш е н и е. Приравнивая $f(z)$ к нулю, получим $\cos z=-1$. Отсюда точки $z_n=(2n+1)\pi$, $n\in\mathbb{N}$, есть нули данной функции.

Далее

$$f'(z)=-\sin z ,\;\; f'((2n+1)\pi)=-\sin(2n+1)\pi=0 ,$$

$$f''(z)=-\cos z ,\;\; f''((2n+1)\pi)=-\cos(2n+1)\pi=1\neq 0 .$$

Следовательно, точки $z_n=(2n+1)\pi$, $n\in$ □ , являются нулями 2-го порядка данной функции.

2 Найти порядок нуля $z_0=0$ функции $f(z)=\dfrac{z^8}{z-\sin z}$.

Р е ш е н и е. Используя разложение функции $\sin z$ в окрестности точки $z_0=0$, получим:

$$f(z)=\frac{z^8}{z-\sin z}=\frac{z^8}{z-\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\ldots\right)}=\frac{z^8}{-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\ldots}=$$

$$=\frac{z^5}{-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{z^2}{5!}+\ldots}=z^5\cdot\frac{1}{-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{z^2}{5!}+\ldots} .$$

Положим $\varphi(z)=\dfrac{1}{-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{z^2}{5!}+\ldots}$.

Тогда $f(z)=z^5\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – функция аналитическая в точке $z_0=0$, причем $\varphi(0)=6\neq 0$.

Следовательно, точка $z_0=0$ является для данной функции нулем 5-го порядка.

3 Какую особенность в точке $z_0=0$ имеет функция

$$f(z)=\frac{\sin z}{z} ?$$

Решение. <u>1 способ</u> Точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой, так как предел в этой точке равен

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

<u>2 способ</u> В окрестности точки $z_0 = 0$ разложение в ряд Лорана имеет вид:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots}{z} =$$

$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!} + \cdots .$$

Видно, что ряд Лорана в точке $z_0 = 0$ не содержит членов с отрицательными степенями, т. е. не содержит главной части. Поэтому точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

4 Какую особенность в точке $z_0 = 0$ имеет функция

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} ?$$

Решение. <u>1 способ</u> Имеем:

– если $z \to 0$ вдоль положительной части действительной оси, то $\lim\limits_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$;

– если $z \to 0$ вдоль отрицательной части действительной оси, то $\lim\limits_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim\limits_{x \to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

Следовательно, данная функция не имеет предела в точке $z_0 = 0$.

<u>2 способ</u> Разложение в ряд Лорана функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z_0 = 0$ имеет вид:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! \cdot z^2} + \cdots + \frac{1}{n! \cdot z^n} + \cdots .$$

Видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов. Следовательно, точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой.

5 Определить какую особенность в бесконечно удаленной точке имеет функция $f(z) = \dfrac{1}{z-4}$.

Решение. Произведем замену переменной z на переменную w по формуле $z = \dfrac{1}{w}$. Тогда данная функция принимает следующий вид $f\left(\dfrac{1}{w}\right) = \dfrac{w}{1-4w}$. При условии $|4w| < 1$ имеет место разложение:

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = w\left(1 + 4w + (4w)^2 + \cdots\right).$$

Возвращаясь к переменной z, имеем:

$$f(z) = \frac{1}{z-4} = \frac{1}{z}\cdot\left(1 + \frac{4}{z} + \frac{4^2}{z^2} + \cdots\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{z^{k+1}},\ |z| > 4.$$

Видно, что ряд Лорана не содержит правильную часть. Следовательно, точка $z = \infty$ является устранимо особой точкой.

6 Найти особые точки и определить их характер для функции

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Решение. Особая точка функции $f(z)$ есть $z_0 = 0$.

1 способ. Вычислим предел

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{e^z - 1}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{e^z}{1} = 1 \ne 0$$

Значит, $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой функции.

2 способ. Разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ имеет вид:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{\left(1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \ldots\right) - 1}{z} =$$

$$= \frac{z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots}{z} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots .$$

Ряд Лорана не содержит главной части, значит по теореме 3 точка $z_0 = 0$ есть устранимая особая точка данной функции.

7 Найти особые точки и определить их характер для функции

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}.$$

Решение. Найдем особые точки функции из условия:

$$z^3 + z^2 - z - 1 = 0 .$$

Решая уравнение, получим две особые точки $z_1 = -1$; $z_2 = 1$.

Найдем предел в точке $z_1 = -1$:

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{\sin z}{(z+1)^2 (z-1)} = \infty$$

Согласно определению, точка $z_1 = -1$ – полюс. Чтобы определить его порядок, представим функцию $f(z)$ в виде:

$$f(z) = \frac{\frac{\sin z}{z-1}}{(z+1)^2} = \frac{\varphi(z)}{(z+1)^2},$$

где $\varphi(z) = \frac{\sin z}{z-1}$ – аналитична в точке $z_1 = -1$ и $\varphi(-1) = \frac{\sin 1}{2} \neq 0$.

Отсюда по теореме 2 точка $z_1 = -1$ – полюс 2-го порядка функции $f(z)$.

Аналогично точка $z_2 = 1$ – полюс, поскольку

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sin z}{(z+1)^2 (z-1)} = \infty .$$

Так как

$$f(z) = \frac{\frac{\sin z}{(z+1)^2}}{z-1} = \frac{\varphi_1(z)}{z-1},$$

где $\varphi_1(z)$ – аналитична в точке $z_2 = 1$ и $\varphi(1) = \dfrac{\sin 1}{4} \neq 0$, то точка $z_2 = 1$ – простой полюс функции $f(z)$

8 Найти особые точки и определить их характер для функции

$$f(z) = \frac{1}{z^3}$$

Решение. Особая точка функции $z_0 = 0$. Так как

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{z^3} = \infty,$$

то точка $z_0 = 0$ – полюс.

Для функции $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)} = z^3$ точка $z_0 = 0$ – нуль третьего порядка, значит, для функции $f(z)$ – полюс 3-го порядка.

9 Определить характер особой точки $z = 0$ для функции

$$f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}.$$

Решение. <u>*1 способ*</u> Рассмотрим поведение функции на действительной и мнимой осях.

Пусть $z = x$ и $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \to \infty$ при $x \to 0$.

Пусть $z = iy$ и $f(iy) = e^{-\frac{1}{y^2}} \to 0$ при $y \to 0$.

Отсюда следует, что функция $f(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела в точке $z_0 = 0$ и $z_0 = 0$ – существенно особая точка функции $f(x)$.

2 способ Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$, т. е. в области $0 < |z| < \infty$:

$$e^{\frac{1}{z^2}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^6} + \ldots$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых, поэтому точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой функции $f(z)$.

Тема 8 Вычеты

1 Найти в особых точках вычеты функций

а) $f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z^2}$;

б) $f(z) = \dfrac{tgz}{z^2 - \frac{\pi}{4}z}$;

в) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$;

г) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$;

д) $f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}$;

е) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$;

ж) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{1}{z+1}$;

и) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+1)}$;

л) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} \cos z$;

м) $f(z) = \dfrac{chz}{(z^2+1)(z-3)}$;

н) $f(z) = z^3 \cos\dfrac{1}{z}$;

о) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}$;

п) $f(z) = e^{z^2 + \frac{1}{z^2}}$;

р) $f(z) = \cos z \sin\dfrac{1}{z}$;

с) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{2}z^2}$;

т) $f(z) = \cos\dfrac{2}{z-\pi}$;

к) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z(z+1)^2}$; у) $f(z)=e^{\frac{2}{z}}$.

2 Вычислить:

а) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\sin z}$; б) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{(1-\operatorname{ch}z)\operatorname{sh}z}{(1-\cos z)\sin^2 z}$.

3 Найти логарифмические вычеты относительно нулей и полюсов функций

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$; б) $f(z)=\cos^3 z$.

4 Найти логарифмические вычеты функций относительно контуров:

а) $f(z)=\dfrac{z}{1+z^3}$. $|z|=2$; б) $f(z)=\operatorname{th}z$, $|z|=8$.

Примеры оформления решения

1 Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z-4}{z^3-z}$.

Решение. Изолированными особыми точками данной функции являются $z_1=0$ – полюс 2-го порядка и $z_2=1$ – простой полюс.

Для точки $z_2=1$ имеем:

$$\operatorname*{Res}\limits_{z=1}\frac{z-4}{z^3-z}=\left.\frac{z-4}{\left(z^3-z\right)'}\right|_{z=1}=\left.\frac{z-4}{3z^2-1}\right|_{z=1}=\frac{1-4}{3\cdot 1-1}=-\frac{3}{2}.$$

Для точки $z_1=0$ имеем:

$$\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\frac{z-4}{z^3-z}=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2\cdot(z-4)}{z^3-z}\right)''=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z-4}{z-1}\right)''=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{3}{(z-1)^2}\right)'=\lim_{z\to 0}\frac{-6}{(z-1)^3}=6.$$

Вычет в бесконечно удаленной точке $z=\infty$ равен:

$$\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}f(z)=-\left(-\frac{3}{2}+6\right)=4{,}5.$$

2 Вычислить вычет функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ в точке $z_0=0$.

Решение. Точка $z=0$ является для функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ существенно особой точкой. Разложим данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$:

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\cdot z^2}+\cdots+\frac{1}{n!\cdot z^n}+\cdots.$$

Отсюда находим $\operatorname*{Res}_{z=0} e^{\frac{1}{z}}=c_{-1}=1$.

3 Найти сумму вычетов относительно всех полюсов функции

$$f(z)=\frac{z^6}{\left(z^2+4\right)^2\left(z^2+1\right)^3}$$

Решение. Полюсами данной функции являются точки: $z_{1,2}=\pm 2i$ – полюса 2-го порядка, $z_{3,4}=\pm i$ – полюса 3-го порядка.

Видно, что в бесконечно удаленной точке функция $f(z)$ имеет нуль первого порядка. Правильная часть ее разложения в ряд Лорана начинается с члена $\frac{1}{z}$.

Следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\frac{z^6}{\left(z^2+4\right)^2\left(z^2+1\right)^3}=-1.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{4}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\frac{z^6}{\left(z^2+4\right)^2\left(z^2+1\right)^3}=1.$$

4 Найти вычеты в особых точках функции

$$f(z)=\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$$

Решение. Изолированные особые точки функции $f(z)$ есть $z_1=0$; $z_2=\frac{\pi}{4}$.

Поскольку

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2}\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{\pi},$$

то точка $z=0$ – устранимая особая точка и поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=0.$$

Так как

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}=\infty,$$

то точка $z=\frac{\pi}{4}$ – полюс.

Преобразуем функцию $f(z)$ к виду:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{\sin z^2}{z^2}}{z-\frac{\pi}{4}}=\frac{\varphi(z)}{z-\frac{\pi}{4}},$$

где $\varphi(z)=\frac{\sin z^2}{z^2}$ – аналитическая в точке $z=\frac{\pi}{4}$, при этом $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$. Значит, $z=\frac{\pi}{4}$ – простой полюс.

Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} f(z)\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^2}=\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}.$$

Вычет в бесконечно удаленной точке $z=\infty$ равен:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-\left(0+\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}\right)=-\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}.$$

5 Найти вычеты в особых точках функции $f(z) = \dfrac{\cos\frac{1}{z}}{z+3}$.

Решение. Изолированные особые точки функции есть $z = -3$ и $z = 0$.

Точка $z = -3$ – простой полюс. Поэтому вычет равен:

$$\operatorname*{Res}_{z=-3} f(z) = \lim_{z\to -3}\left(\frac{\cos\frac{1}{z}}{z+3}\right)(z+3) = \lim_{z\to -3}\cos\frac{1}{z} = \cos\frac{1}{3}.$$

Точка $z = 0$ – существенно особая точка функции. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$. Поскольку

$$\cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4!\,z^4} - \frac{1}{6!\,z^6} + \ldots,$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} - \frac{z^3}{3^3} + \ldots\right),$$

то

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4!\,z^4} - \frac{1}{6!\,z^6} + \ldots\right)\left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} - \frac{z^3}{3^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{3z}\left(\frac{1}{2!\cdot 3} - \frac{1}{4!\cdot 3^3} + \frac{1}{6!\cdot 3^5} - \ldots\right) + \frac{1}{z^2}c_{-2} + \ldots + .$$

Таким образом, находим:

$$c_{-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\cdot 2!} - \frac{1}{3^3\cdot 4!} + \frac{1}{3^5\cdot 6!} - \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!\cdot 3^{2n}}.$$

Значит,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!\cdot 3^{2n}}.$$

6 Найти вычеты функции в особых точках $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)^2}$.

Решение. Особая точка функции $z=1$ есть полюс 2-го порядка. Находим

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z-1)^2}(z-1)^2\right)=\lim_{z\to 1}\left(z^2\right)'=\lim_{z\to 1}2z=2.$$

7 Найти логарифмические вычеты относительно нулей и полюсов функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z+1}$.

Решение. Точки вида $z_k=\pi k$, $k\in\mathbb{N}$, являются простыми нулями функции. Логарифмический вычет равен:

$$\operatorname*{Res}_{z_k=\pi k}\left(\ln f(z)\right)'=1.$$

Точка $z=-1$ есть простой полюс данной функции. Поэтому:

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}\left(\ln f(z)\right)'=-1.$$

8 Найти логарифмический вычет функции $f(z)=\dfrac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$ относительно окружности $|z|=\pi$.

Решение. В круге $|z|<\pi$ данная функция имеет два простых нуля $z=i$ и $z=-i$, а также семь полюсов 2-го порядка

$$z_k=k,\ k=0,\pm1,\pm2,\pm3.$$

Логарифмический вычет относительно окружности $|z|=\pi$ равен

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\pi}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2-7=-5.$$

Тема 9 Приложения вычетов

1 Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}dz$;

б) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{zdz}{(z-1)^2(z+2)}$;

в) $\oint\limits_{|z|=\frac{2}{3}} \left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz$;

г) $\oint\limits_{|z|=1} z^3\sin\frac{1}{z}dz$;

д) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}$;

е) $\oint\limits_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin\pi z}{z^2-z}dz$;

ж) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}$;

и) $\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}dz$;

к) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\sin zdz}{(z-1)^5}$;

л) $\oint\limits_{|z|=1} z^3\sin\frac{1}{z}dz$;

м) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos zdz}{z^2-4}$;

н) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} (z+1)e^{\frac{1}{z}}dz$;

о) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z+1}{z^2+2z-3}dz$;

п) $\oint\limits_{|z|=1} z\,\mathrm{tg}\,\pi z dz$;

р) $\oint\limits_{|z+1|=4} \frac{zdz}{e^z+3}$;

с) $\oint\limits_{|z-i+2|=2} \frac{1-\cos^2 z}{z^2+z-2}dz$;

т) $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{z\sin z}{z^2+5z-6}dz$;

у) $\oint\limits_{|z|=1} \sin\frac{1}{z^2}dz$.

2 Вычислить с помощью вычетов интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3-2\cos x+\sin x}$;

б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos x}{2+\sin x}dx$;

л) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2\,dx}{2+\sin x}$;

м) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin 2x\,dx}{8+\sin x}$;

в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$;

н) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$;

г) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}$;

о) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$;

д) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x\ dx}{x^2-2x+10}$;

п) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2+4x+20}$;

е) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos xdx}{x^2+9}$;

р) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^3\sin 2xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$;

ж) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{1-4\cos x+4}$;

с) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$;

и) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x+4}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx$;

т) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(x-3\right)^2}{\left(x^2+9\right)^3}dx$;

к) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^2\cos 2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$;

у) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin x}{\left(x^2+9\right)^2}dx$.

3 Найти суммы следующих рядов:

а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{\left(k+4\right)^2}$;

б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k\cos\alpha k}{k^2+9}$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить $\displaystyle\oint_{\Gamma}\frac{dz}{\left(z-1\right)^3\left(z^2+1\right)}$, где $\Gamma=\left\{\,z\in\mathbb{C}\,\middle|\;\left|z-1-i\right|=2\,\right\}$.

Решение. В круге $\left|z-1-i\right|<2$ данная функция имеет полюс 3-го порядка в точке $z_1=1$, простые полюса порядка в точках $z_{2,3}=\pm i$. Точка $z=-i$ не принадлежит кругу $\left|z-1-i\right|<2$. Тогда получим:

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z-1)^3(z^2+1)} = 2\pi i \cdot \left[\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)} + \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{2!} \lim_{z\to 1} \left(\frac{(z-1)^3}{(z-1)^3(z^2+1)} \right)'' + \lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z-1)^3(z+i)(z-i)} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \left(\frac{1}{(z^2+1)} \right)'' + \lim_{z\to i} \frac{1}{(z-1)^3(z+i)} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to 1} \left(\frac{2z}{(z^2+1)^2} \right)' + \frac{1}{(i-1)^3(i+i)} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to 1} \frac{2\cdot(z^2+1)^2 - 2z\cdot 2\cdot(z^2+1)\cdot 2z}{(z^2+1)^4} + \frac{1}{2i\cdot(i-1)^3} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to 1} \frac{2\cdot(z^2+1)(z^2+1-4z^4-4z^2)}{(z^2+1)^4} - \frac{i}{2\cdot(i-1)^3} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[-\frac{i}{2\cdot(i-1)^3} + \frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to 1} \frac{2\cdot(1-4z^4-z^2)}{(z^2+1)^4} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\frac{2(1-4-1)}{(1+1)^4} - \frac{i}{2\cdot(i-1)^3} \right] = -\frac{\pi}{2}(1+i).$$

2 Вычислить интеграл $\oint_{\Gamma} \frac{e^z - 1}{z^2 + 2z - 3} dz$, где

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{2} \right| = 1 \right\}.$$

Решение. Контур Γ интегрирования есть окружность радиуса $R = 1$ с центром в точке $z = \frac{1}{2}$.

Найдем особые точки функции: $z^2 + 2z - 3 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = -3$. Точка $z_2 = -3$ лежит вне области, ограниченной контуром Γ, а

$z_1 = 1$ находится внутри области. Определим характер точки $z_1 = 1$:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{(z-1)(z+3)} = \frac{\frac{e^z - 1}{z+3}}{z-1} = \frac{\varphi(z)}{z-1},$$

где $\varphi(z) = \dfrac{e^z - 1}{z+3}$ – аналитическая функция, $\varphi(1) = \dfrac{e-1}{4} \neq 0$.

Значит, точка $z = 1$ – простой полюс.

Тогда вычет равен

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{e^z - 1}{(z-1)(z+3)}(z-1) = \lim_{z\to 1} \frac{e^z - 1}{z+3} = \frac{e-1}{4}.$$

Имеем:

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^z - 1}{z^2 + 2z - 3} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 2\pi i \frac{e-1}{4} = \pi i \frac{e-1}{2}.$$

3 Вычислить интеграл $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + 9\right)^2}$.

Решение. Так как подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{x^2}{\left(x^2 + 9\right)^2}$ четная, то

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + 9\right)^2}.$$

Введем функцию $f(z) = \dfrac{z^2}{\left(z^2 + 9\right)^2}$, которая на действительной оси (при $z = x$) совпадает $f(x)$. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости полюс 2-го порядка в точке $z = 3i$. Вычет $f(z)$ относительно этого полюса равен:

$$\operatorname*{Res}_{z=ai} \frac{z^2}{\left(z^2 + 9\right)^2} = \lim_{z\to ai} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{\left(z^2 + 9\right)^2}(z - 3i)^2\right] =$$

$$= \lim_{z\to ai} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+3i)^2}\right] = \lim_{z\to ai} \frac{2aiz}{(z+3i)^3} = \frac{1}{12i}.$$

Тогда получим:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{12i} = \frac{\pi}{12}.$$

4 Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$ определена на всей действительной оси $-\infty < x < +\infty$. Аналитическое продолжение этой функции в верхнюю полуплоскость ($\operatorname{Im} z \ge 0$) есть функция $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$, являющаяся аналитической в каждой точке верхней полуплоскости за исключением точки $z = i$ (полюса 3-го порядка). На действительной оси полюсов нет. При этом для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию $|z| = R > R_0 > 1$, имеет место оценка:

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{(z^2+1)^3}\right| < \frac{1}{|z|^6}.$$

Поэтому для исходного интеграла можно применить теорему 2:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{(z-i)^3}{(z^2+1)^3}\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to i} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{z\to i} \frac{12}{(z+i)^5} = -\frac{3i}{16}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{1}{(x^2+1)^3} = 2\pi i\left(-\frac{3i}{16}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

5 Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+9}\,dx$.

Решение. Введем вспомогательную функцию $f(z)=\dfrac{ze^{i2z}}{z^2+9}$.

Видно, если $z=x$, то $f(z)$ совпадает с подынтегральной функцией $\varphi(x)=\dfrac{x\sin 2x}{x^2+9}$.

Рассмотрим контур C_R (рисунок 19). При достаточно большом R на контуре C_R функция $g(z)=\dfrac{z}{z^2+9}$ удовлетворяет неравенству $|g(z)|\le\dfrac{R}{R^2+9}$.

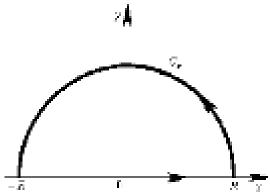

Рисунок 19 – Рисунок к типовому примеру 5

Следовательно, $g(z)$ стремится к нулю при $R\to\infty$.

Значит, по лемме Жордана $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}\dfrac{ze^{i2z}}{z^2+9}dz=0$.

Так как точка $z=3i$ является простым полюсом, то вычет равен

$$\operatorname*{Res}_{z=3i}\frac{ze^{i2z}}{z^2+9}=\lim_{z\to 3i}\frac{ze^{i2z}}{z^2+9}(z-3i)=\frac{1}{2}e^{-6}.$$

Для любого $R>3$ имеем:

$$\int\limits_{-R}^{+R}\frac{xe^{i2x}}{x^2+9}dx+\int\limits_{C_R}\frac{xe^{i2x}}{x^2+9}dx=2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=3i}\frac{ze^{i2z}}{z^2+9}=2\pi i\cdot\frac{1}{2}e^{-6}=\pi ie^{-6}.$$

Переходя к пределу при $R\to\infty$, получим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{xe^{i2x}}{x^2+9}dx=\pi ie^{-6}$.

Отделяя слева и справа действительные и мнимые части, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+9}\, dx = \pi\, e^{-6}.$$

6 Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Решение. Имеем:

$$z = e^{ix};\ dx = \frac{dz}{iz}:\ \cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{2z}.$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{2+\frac{z^2+1}{2z}} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4z+1}.$$

Найдем особые точки функции $f(z) = \frac{1}{z^2+4z+1}$:

$$z^2 + 4z + 1 = 0;$$

$$z_1 = -2+\sqrt{3};\ z_2 = -2-\sqrt{3}$$

Точка z_1 лежит в круге $|z|<1$, а точка z_2 – вне круга. Тогда получим:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2}{i} 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} \frac{1}{z^2+4z+1} =$$

$$= 4\pi \lim_{z\to\sqrt{3}-2} \frac{\left(z-\sqrt{3}+2\right)}{\left(z-\sqrt{3}+2\right)\left(z+\sqrt{3}+2\right)} =$$

$$= 4\pi \lim_{z\to\sqrt{3}-2} \frac{1}{z+\sqrt{3}+2} = \frac{4\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

7 Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$. Эта функция аналитична всюду на $\mathbb{C}$, кроме точек $z_1 = -2i$ и $z_2 = 2i$, которые являются простыми полюсами.

Поскольку

$$f(z)=\frac{1}{z^2+4}=\frac{1}{z^2\left(1+\frac{4}{z^2}\right)},$$

то $\frac{1}{z^2+4}=O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ при $z\to\infty$.

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=-\pi\left[\operatorname*{Res}_{z=-2i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^2+4}+\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^2+4}\right]=$$

$$=-\pi\left[\lim_{z\to-2i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{2z}+\lim_{z\to 2i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{2z}\right]=-\pi\left[\frac{\operatorname{ctg}(-2i\pi)}{-2i\cdot 2}+\frac{\operatorname{ctg}(2i\pi)}{2i\cdot 2}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\operatorname{cth}2\pi\ .$$

Ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}$ можно записать в виде:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=\ldots+\frac{1}{(-2)^2+4}+\frac{1}{(-1)^2+4}+\frac{1}{0^2+4}+\frac{1}{1^2+4}+\frac{1}{2^2+4}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}\ .$$

Отсюда находим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}-\frac{1}{8}\ .$$

Искомая сумма данного ряда равна

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=\frac{\pi}{4}\operatorname{cth}2\pi-\frac{1}{8}\ .$$

Раздел 3 Операционное исчисление

Тема 1 Преобразование Лапласа

1 Проверить, какие из указанных функций являются функциями оригиналами:

а) $f(t) = 2^t \eta(t)$;

б) $f(t) = \mathrm{ch}(2-i)t\,\eta(t)$;

в) $f(t) = \dfrac{1}{t-3}\eta(t)$;

г) $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}\eta(t)$.

2 Найти изображения следующих функций:

1) $2t+3$;

2) te^{2t};

3) $\sin 3t$;

4) $\int\limits_0^t (t-\tau)^2 \,\mathrm{ch}\,\tau d\tau$;

5) $t + 2\sin t$;

6) $4t + 4\,\mathrm{sh}\,t + 2e^t$;

7) e^{4t};

8) $\sin wt$;

9) $\sin^2 t$;

10) $e^{2t}\sin 2t$;

11) $e^{-t}t^3 + e^{4t}\,\mathrm{sh}\,t$;

12) $\int\limits_0^t \tau\,\mathrm{sh}\,2\tau d\tau$;

13) $\dfrac{\sin^2 t}{t}$;

14) $\cos^2 t$;

15) $t\cos 3t$;

16) $t^2\cos 2t$;

19) $\sin(t-2)\eta(t-2)$;

20) $\dfrac{e^t - 1}{t}$;

21) $e^{t-2}\eta(t-2)$;

22) $\int\limits_0^t e^{t-\tau}\sin \tau d\tau$;

23) $\sin 2t\cos 4t$;

24) $2\,\mathrm{ch}^2\, 2t - 4e^{5t}$;

25) $e^{-4t}\sin^2 t$;

26) $\cos^2(t-1)\eta(t-1)$;

27) $(t-1)^2\eta(t)$;

28) $\sin^3 t$;

29) $(t^3+t)\sin 2t$;

30) $\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$;

31) $\dfrac{\cos t - \cos 2t}{t}$;

32) $3 + 4t + 2t^2$;

33) $1 + e^{-2t} + t^2$;

34) $t\sin wt$;

17) $t^2\left(e^{2t}+\operatorname{ch}3t\right)$;

18) $\int\limits_0^t \sin\tau d\tau$;

35) $e^{2t}\sin t$;

36) $\int\limits_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}d\tau$.

3 По графику оригинала (рисунок 20) найти изображение.

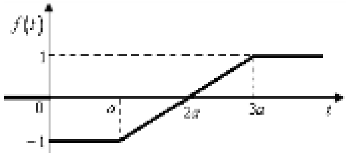

Рисунок 20 – Рисунок к задаче 3

П р и м е р ы   о ф о р м л е н и я   р е ш е н и я

1 Проверить, является ли оригиналом функция:

$$f(t)=\begin{cases} e^{2t}\sin t, \text{ ï ðè } t\ge 0, \\ 0, \text{ ï ðè } t<0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Проверим, удовлетворяет ли данная функция условиям 1-3 определения оригинала.

В самом деле:

1) $f(t)\equiv 0$ при $t<0$;

2) при $t\ge 0$ функция непрерывна;

3) для любых $t\in$ □ выполняется неравенство

$$\left|e^{2t}\sin t\right|\le e^{2t}.$$

Отсюда $M=1$, $s_0=2$.

2 Найти изображения функций:

а) Хевисайда

$$\eta(t)=\begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad t\ge 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad t<0, \end{cases}$$

б) $f(t)=e^{4t}$, $t\ge 0$.

Р е ш е н и е. а) функция $\eta(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0=0$. Тогда согласно определению изображения получим:

$$F(p)=\int_0^{\infty}1\cdot e^{-pt}dt=\lim_{N\to\infty}\int_0^{N}1\cdot e^{-pt}dt=\lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{p}\cdot e^{-pt}\Big|_0^N\right)=\frac{1}{p}$$

при $u=\operatorname{Re}\,p>0$;

б) функция $f(t)=e^{4t}$ является оригиналом с показателем роста $s_0=4$. Поэтому изображение $F(p)$ может быть определено в полуплоскости $\operatorname{Re}p>4$. Имеем:

$$F(p)=\int_0^{\infty}e^{4t}\cdot e^{-pt}dt=\lim_{N\to\infty}\int_0^{N}e^{-(p-4)t}dt=-\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{p-4}e^{-(p-4)t}\Big|_0^N\right)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{p-4}-\frac{e^{-(p-4)N}}{p-4}\right)=\frac{1}{p-4}.$$

Функция $F(p)=\dfrac{1}{p-4}$ является аналитической не только в полуплоскости $\operatorname{Re}p>4$, но и на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением точки $p=4$. Такая особенность наблюдается и для многих изображений.

3 Пользуясь определением, найти изображение функции

$$f(t)=\sin t,\ t\ge 0.$$

Решение. Для $\operatorname{Re}p>0$ имеем:

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\sin t\,e^{-px}dt=\begin{bmatrix}u=e^{-pt};\ du=-pe^{pt}dt;\\ dv=\sin t\,dt;\ v=-\cos t\end{bmatrix}=$$

$$=-e^{-pt}\cos t\Big|_0^{+\infty}-p\int_0^{+\infty}\cos t\ e^{-pt}dt=\begin{bmatrix}u=e^{-pt};\ du=-pe^{-pt}dt;\\ dv=\cos t\,dt;\ v=\sin t\end{bmatrix}=$$

$$=1-p\left(pe^{-pt}\sin t\Big|_0^{+\infty}-p\int_0^{+\infty}\sin t\,e^{-pt}dt\right)=$$

$$=1-p^2\int_0^{+\infty}\sin t\,e^{-pt}dt.$$

Отсюда

$$\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt} dt = 1 - p^2 \int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt} dt\,.$$

Выразим искомый интеграл:

$$\left(1+p^2\right)\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt} dt = 1\,.$$

Тогда

$$F\left(p\right) = \int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt} dt = \frac{1}{1+p^2}\,.$$

4 Пользуясь свойством подобия, найти изображение функции

$$f\left(t\right) = \sin 2t\,,\ t \ge 0$$

Решение. Так как $\sin t = \dfrac{1}{p^2+1}$, $\operatorname{Re} p > 0$, то по свойству подобия получим:

$$\sin 2t \doteq \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\frac{4}{p^2+4} = \frac{2}{p^2+4}\,,\ \operatorname{Re} p > 0\,.$$

5 Пользуясь свойством смещения, найти изображение оригинала $f\left(t\right) = e^{-t}\cos 2t\,,\ t \ge 0$

Решение. Так как $\cos 2t \doteq \dfrac{p}{p^2+4}$ и $a = -1$, то по свойству смещения получим:

$$e^{-t}\cos 2t \doteq \frac{p+1}{\left(p+1\right)^2+4}\,.$$

6 Пользуясь свойством запаздывания, найти изображение оригинала

$$f\left(t-1\right) = \left(t-1\right)^2 \eta\left(t-1\right).$$

Решение. Для функции $f\left(t\right) = t^2\eta\left(t\right)$ имеем $f\left(t\right) \doteq \dfrac{2}{p^3}$. По свойству запаздывания находим:

$$\left(t-1\right)^2\eta\left(t-1\right) \doteq e^{-p}\,\frac{2}{p^3}\,.$$

7 Найти изображение оригинала $f(t)$, заданного графиком на рисунке 21.

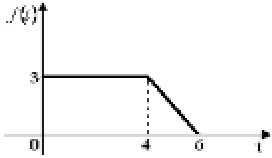

Рисунок 21 – График функции $f(t)$
к типовому примеру 7

Решение. Аналитическое выражение для функции $f(t)$ имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases} 0, \text{ при } t<0, \\ 3, \text{ при } 0\le t<4, \\ 9-\frac{3}{2}t, \text{ при } 4\le t<6, \\ 0, \text{ при } t\ge 6. \end{cases}$$

С помощью единичной функции Хевисайда функцию $f(t)$ можно записать следующим образом:

$$f(t)=3\eta(t)-3\eta(t-4)+\left(9-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-4)-\left(9-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-6)=$$

$$=3\eta(t)+\left(6-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-4)-\left(9-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-6).$$

Для нахождения изображения этой функции представим ее в форме:

$$f(t)=3\eta(t)+\varphi_1(t-4)\eta(t-4)+\varphi_2(t-6)\eta(t-6),$$

Имеем:

$$f(t)=3\eta(t)-\frac{3}{2}(t-4)\eta(t-4)+\frac{3}{2}(t-6)\eta(t-6).$$

Отсюда $\varphi_1(t)=-\frac{3}{2}t$, $\varphi_2(t)=\frac{3}{2}t$. Так как

$$\varphi_1(t)=-\frac{3}{2}t \doteq -\frac{3}{2p^2},\ \varphi_2(t)=\frac{3}{2}t \doteq \frac{3}{2p^2},$$

то по свойству запаздывания находим изображение

$$f(t) \doteq \frac{3}{p} - \frac{3}{2p^2}e^{-4p} + \frac{3}{2p^2}e^{-6p}.$$

8 Найти изображение π -периодичной функции

$$f(t) = |\sin t|$$

при $0 \le t \le \pi$, график которой представлен на рисунке 22.

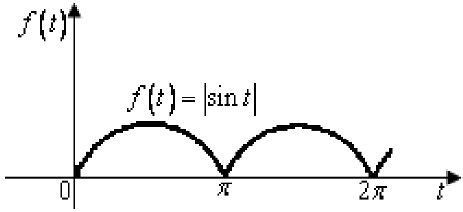

Рисунок 22 – График π -периодичной функции

$$f(t) = |\sin t|$$

Решение. Учитывая типовой пример 3 и свойство изображения периодической функции, имеем:

$$|\sin t| \doteq \frac{1}{1-e^{-\pi \cdot p}} \cdot \int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{1-e^{-\pi \cdot p}} \cdot \left. \frac{e^{-pt}(p \sin t - \cos t)}{p^2+1} \right|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1+e^{-\pi p}}{\left(1-e^{-\pi p}\right) \cdot \left(p^2+1\right)}.$$

9 Найти изображение функции $f(t) = \sin^2 t$.

Решение. Пусть $f(t) \doteq F(p)$. Тогда

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0).$$

Так как $f(0) = \sin^2 0 = 0$, и

$$\left(\sin^2 t\right)' = 2\sin t \cos t = \sin 2t \doteq \frac{2}{p^2+4},$$

то

$$\frac{2}{p^2+4} = pF(p).$$

Откуда

$$F(p) = \frac{2}{p\left(p^2+4\right)}.$$

Значит,

$$\sin^2 t \doteq \frac{2}{p\left(p^2+4\right)};$$

10 Найти изображение функции $f(t)=t^2e^{3t}$.

Решение. Имеем $e^{3t} \doteq \dfrac{1}{p-3}$.

Применяя свойство дифференцирования изображения, получаем

$$t^2e^{3t} \doteq (-1)^2\left(\frac{1}{p-3}\right)'' = \left(-\frac{1}{(p-3)^2}\right)' = \frac{2}{(p-3)^3}.$$

11 Найти изображение оригинала $\int\limits_0^t \tau e^{\tau}d\tau$.

Решение. Так как $e^t \doteq \dfrac{1}{p-1}$, то по свойству дифференцирования изображения имеем:

$$te^t \doteq -\left(\frac{1}{p-1}\right)' = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

По свойству интегрирования оригинала получим:

$$\int\limits_0^t \tau e^{\tau}d\tau = \frac{1}{p(p-1)^2}.$$

12 Используя свойство интегрирования изображения, найти изображение интегрального синуса $\mathrm{Si}\,t = \dfrac{\sin t}{t}$.

Решение. Так как $\sin t \doteq \dfrac{1}{p^2+1}$, то по свойству интегрирования изображения получим:

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int\limits_p^{\infty}\frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p\,\Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} p.$$

13 Найти изображение оригинала $\psi(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)e^{\tau}d\tau$.

Решение. Оригинал $\psi(t)$ есть свертка оригиналов $g(t)=t$, $f(t)=e^t$. По свойству свертки имеем:

$$\psi(t) \doteq \Psi(p) = F(p)G(p) = \frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Тема 2 Восстановление оригинала по изображению

Найти оригиналы по изображению:

1 $\dfrac{2e^{-p}}{p^3}+\dfrac{e^{-2p}}{p-1}$.

2 $\dfrac{p}{(p+1)^2}$.

3 $\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

4 $\dfrac{3p^2}{(p^3-1)^2}$.

5 $\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$.

6 $e^{-\frac{1}{p}}-1$.

7 $\dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.

8 $\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

9 $\dfrac{1}{p^2+2p-3}$.

10 $\dfrac{2p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

11 $\dfrac{p+1}{p^2+4p+5}$.

12 $\dfrac{1}{p^2+4p+5}$.

13 $\dfrac{1}{p+2p+p^3}$.

14 $\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

15 $\dfrac{e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p}}{p^2+1}$.

16 $\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$.

17 $\sin\dfrac{1}{p}$.

18 $\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

19 $\dfrac{p}{(p^3+1)^2}$.

20 $\dfrac{p}{p^2+2p+2}$.

21 $\dfrac{2}{p^2+3p+2}$.

22 $\dfrac{3p}{(p^2+9)(p^2+1)}$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{2p^2}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Р е ш е н и е. Найдем оригинал непосредственно с помощью свойств преобразования Лапласа и таблицы изображений. Поскольку

$$\frac{2p^2}{\left(p^2+1\right)^2}=2p\cdot\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1},$$

$$\frac{1}{p^2+1}\doteq\sin t, \qquad \frac{p}{p^2+1}\doteq\cos t,$$

то на основании формулы Дюамеля имеем

$$2p\cdot\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\doteq 2\int_0^t\cos\tau\cdot\cos(t-\tau)d\tau+0=t\cos t+\sin t.$$

2 Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{1}{p\left(p^2+4\right)}$.

Р е ш е н и е. Из таблицы изображений имеем $\dfrac{2}{p^2+4}\doteq\sin 2t$.

Используя свойства линейности и интегрирования оригинала, находим:

$$F(p)=\frac{1}{p\left(p^2+4\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{2}{p^2+4}\doteq\frac{1}{2}\int_0^t\sin 2\tau d\tau=$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 2\tau\,\Big|_0^t=\frac{1}{4}\left(1-\cos 2t\right).$$

3 Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$.

Р е ш е н и е. Функция $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$ является аналитической в точке $p=\infty$. Разложение ее в ряд Лорана в окрестности точки $p=\infty$ имеет вид:

$$F(p)=\frac{p}{p^2+1}=\frac{p}{p^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{p^2}\right)}=\left[\left|\frac{1}{p^2}\right|<1\Rightarrow|p|>1\right]=$$

$$=\frac{1}{p}\cdot\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}-\ldots\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^5}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{2n+1}}.$$

Следовательно, по 1-й теореме разложения при $t>0$ имеем

$$f(t)=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\ldots=\cos t.$$

4 Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p)=\frac{-5}{p(p-1)\left(p^2+4p+5\right)}.$$

Решение. Представим $F(p)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{-5}{p(p-1)\left(p^2+4p+5\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+4p+5}$$

Находим коэффициенты:

$$A=1;\ B=-\frac{1}{2};\ C=-\frac{1}{2};\ D=\frac{3}{2}.$$

Тогда по второй теореме разложения найдем оригинал:

$$\frac{-5}{p(p-1)\left(p^2+4p+5\right)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p+3}{p^2+4p+5}=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1}\doteq$$

$$\doteq 1-\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos t-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin t.$$

5 Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{p-1}{(p+1)\left(p^2+4\right)}$.

Решение. Функция $F(p)$ правильная рациональная несократимая дробь, для которой точки $p_1=-1$, $p_2=-2i$, $p_3=2i$ являются простыми полюсами. Так как:

– для $p_1 = -1$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_1=-1} = \left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_1=-1} = -\frac{2}{5},$$

– для $p_2 = -2i$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_2=-2i} = \left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_2=-2i} = \frac{-1-2i}{-8-4i} = \frac{1+2i}{8+4i} = \frac{4+3i}{20};$$

– для $p_3 = 2i$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_3=2i} = \left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_3=2i} = \frac{-1+2i}{-8+4i} = \frac{1-2i}{8-4i} = \frac{4-3i}{20},$$

то по второй теореме разложения получим:

$$f(t) = \frac{-2}{5}e^{-t} + \frac{4+3i}{20}e^{-2it} + \frac{4-3i}{20}e^{2it} =$$

$$= \frac{-2}{5}e^{-t} - \frac{2}{5}\cos 2t + \frac{3}{10}\sin 2t.$$

6 Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{p}{\left(p^2-1\right)^2}$.

Решение. Функция $F(p)$ в точках $p_1 = 1$ и $p_2 = -1$ имеет полюсы 2-го порядка

Следовательно, по второй теореме разложения находим:

$$F(p) = \frac{p}{\left(p^2-1\right)^2} \doteqdot \frac{1}{1!}\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\cdot\frac{e^{pt}p}{(p+1)^2} + \frac{1}{1!}\lim_{p\to -1}\frac{d}{dp}\cdot\frac{e^{pt}p}{(p-1)^2} =$$

$$= \lim_{p\to 1}\frac{\left(te^{pt}p + e^{pt}\right)(p+1)^2 - e^{pt}p\cdot 2(p+1)}{(p+1)^4} +$$

$$+ \lim_{p\to -1}\frac{\left(te^{pt}p + e^{pt}\right)(p-1)^2 - e^{pt}p\cdot 2(p-1)}{(p-1)^4} =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(te^{t} + e^{t}\right)4 - 4e^{t}\right] + \frac{1}{16}\left[\left(-te^{-t} + e^{-t}\right)4 - 4e^{-t}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}te^{t} - \frac{1}{4}te^{-t} = \frac{1}{2}t\frac{e^{t}-e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}t\,\mathrm{sh}\,t.$$

7 Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

Решение. Аналитическим продолжением функции $F(p)$ в левую полуплоскость $\operatorname{Re} p \le s_0$ является функция $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, удовлетворяющая условиям леммы Жордана и имеющая две особые точки – полюсы первого порядка $p_1=-i\omega$ и $p_2=i\omega$. Поэтому при $\operatorname{Re} p = u \ge 0$ и $t>0$ имеем:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}e^{pt}dp=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,e^{p_k t}=$$

$$=\frac{\omega e^{i\omega t}}{2i\omega}-\frac{\omega e^{-i\omega t}}{2i\omega}=\sin\omega t\,.$$

Тема 3 Приложения операционного исчисления

1 Решить задачи Коши:

1) $x'+x=e^{-t}$,
$x(0)=1$;

2) $x'+2x=\sin t$,
$x(0)=0$;

3) $x''+x'=1$,
$x(0)=0$, $x'(0)=1$;

4) $x''+2x'-3x=e^{-t}$,
$x(0)=0$, $x'(0)=1$;

5) $x''-2x'+2x=1$,
$x(0)=x'(0)=0$;

6) $x''+x'=\cos t$,

11) $x''+x'=4\sin^2 t$,
$x(0)=0$, $x'(0)=-1$;

12) $x^4-x''=\cos t$,
$x(0)=0$, $x'(0)=-1$,
$x''(0)=x'''(0)=0$;

13) $x''(t)+x'(t)=2t$,
$x(1)=1$, $x'(1)=-1$;

14) $x''(t)+x(t)=-2\sin t$,
$x(\pi/2)=0$, $x'(\pi/2)=1$;

15) $x'-2x=1$,
$x(0)=14$

16) $x''+x'=e^{-t}$,

$x(0)=2$, $x''+x'=0$;

7) $x'''+x'=1$,
$x(0)=x'(0)=x''(0)=0$;

8) $x'''-x''=\sin t$,
$x(0)=x'(0)=x''(0)=0$;

9) $x'''+x'=e^t$,
$x(0)=0$, $x'(0)=2$,
$x''(0)=0$;

10) $x''-2x'=e^{2t}$,
$x(0)=x'(0)=0$;

$x(0)=0$, $x'(0)=-1$;

17) $x'+3x=t^2$,
$x(0)=0$;

18) $x''+4x=f(t)$,
$x(0)=x'(0)=0$,
$f(t)$ изображена на рисунке 23;

19) $x''+x=f(t)$,
$x(0)=x'(0)=0$,
$f(t)$ изображена на рисунке 24;

20) $x''-x=\dfrac{1}{e^t+2}$,
$x(0)=x'(0)=0$.

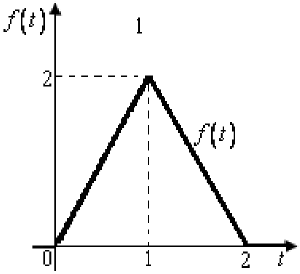

Рисунок 23 – График $f(t)$ для задачи 1 (18)

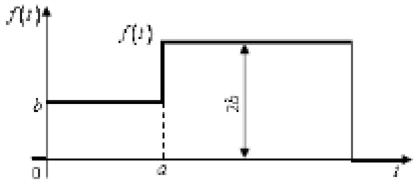

Рисунок 24 – График $f(t)$ для задачи 1 (19)

2 Решить системы уравнений с заданными начальными условиями:

1) $\begin{cases} x'+y=0, \\ y'+x=0, \end{cases}$
$x(0)=1$, $y(0)=-1$;

2) $\begin{cases} x+x'=y+e^t, \\ y+y'=x+e^t, \end{cases}$

8) $\begin{cases} y'-4z=4t, \\ z'-y=5\cos t, \end{cases}$
$y(0)=2$, $z(0)=0$;

9) $\begin{cases} y'+9z=3e^t, \\ z'+y=8\,\mathrm{sh}\,t, \end{cases}$

$x(0)=y(0)=1$; $y(0)=0$, $z(0)=2$;

3) $\begin{cases} y'+z=2\sin t, \\ z'+y=-1, \end{cases}$
$y(0)=0$, $z(0)=1$;

10) $\begin{cases} y'+9z=3e^{t}, \\ z'+y=8\operatorname{sh}t, \end{cases}$
$y(0)=0$, $z(0)=2$;

4) $\begin{cases} y'+y-3z=2, \\ z'-y-z=5\cos t, \end{cases}$,
$y(0)=1$, $z(0)=0$;

11) $\begin{cases} x'-y'-2x+2y=1-2t, \\ x''+2y'+x=0, \end{cases}$
$x(0)=y(0)=x'(0)=0$;

5) $\begin{cases} y'-y+z=\operatorname{sh}t, \\ z'+y+z=t, \end{cases}$
$y(0)=0$, $z(0)=-1$;

12) $\begin{cases} x''-3x'+2x+y'-y=0, \\ -x'+x+y''-5y'+4y=0, \end{cases}$,
$x(0)=x'(0)=y'(0)=0$;
$y(0)=1$;

6) $\begin{cases} y'-y+3z=4\sin 2t, \\ z'+y+z=4t, \end{cases}$
$y(0)=1$, $z(0)=-1$;

13) $\begin{cases} x'=-y-z, \\ y'=-x-z, \\ z'=-x-y, \end{cases}$
$x(0)=-1$,
$y(0)=0$,
$z(0)=1$.

7) $\begin{cases} y'+y-z=t^{2}, \\ z'-y-z=\operatorname{ch}t, \end{cases}$
$y(0)=-1$, $z(0)=1$;

3 Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы $m\lambda x$ пропорциональной смещению, и силы сопротивления $2m\mu v$, пропорциональной скорости. В момент времени $t=0$ частица находится на расстоянии x_0, от положения равновесия и обладает скоростью v_0. Показать, что если имеет место равенство $n^2 = \lambda^2 - \mu^2$, то смещение частицы определяется выражением $\frac{1}{n}e^{-\mu t}\left(nx_0 \cos nt + (v_0 + \mu x_0)\sin nt\right)$.

4 Для электрической цепи (рисунок 25) определить напряжение на элементе L_1 цепи при подключении постоянной э. д. с. $e(t) = E$ (в случае необходимости положить $u_C(0) = 0$.

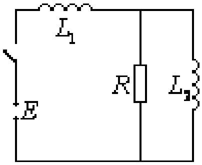

Рисунок 25 – Электрическая цепь к задаче 4

Примеры оформления решения

1 Решить уравнение $x'' + 4x = t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$.

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$.

По свойству дифференцирования оригинала

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - px_0 - x_1;\ \ f(t) \doteq t = \frac{1}{p^2}.$$

В результате приходим к алгебраическому уравнению:

$$p^2 X(p) - px_0 - x_1 + 4X(p) = \frac{1}{p^2}$$

Отсюда получаем:

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p^2+4)} + \frac{px_0}{p^2+4} + \frac{x_1}{p^2+4}$$

Разложив изображение $X(p)$ на простейшие дроби и используя таблицу изображений, находим решение задачи Коши:

$$X(p) = \frac{1}{4p^2} - \frac{1}{4(p^2+4)} + \frac{px_0}{p^2+4} + \frac{x_1}{p^2+4} \doteq$$

$$\doteq x(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t + x_0 \cos 2t + \frac{x_1}{2}\sin 2t.$$

2 Решить уравнение $y''' - y'' - 6y' = 0$ удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 15$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 56$.

Решение. Пусть $y(t) \doteq Y(p)$. Тогда

$y'(t) \doteq p \cdot Y(p) - y(0) = pY(p) - 15$,

$y''(t) \doteq p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 15p - 2$,

$y'''(t) \doteq p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot y(0) - p \cdot y'(0) - y''(0) =$

$= p^3 F(p) - 15p^2 - 2p - 56$.

Подставляя в дифференциальное уравнение и преобразовывая, получим:

$$Y(p) = \frac{15(p^2 - p - 6) + 2(p-1) + 56}{p^3 - p^2 - 6p} = \frac{15p^2 - 13p - 36}{p(p+2)(p-3)} =$$

$$= \frac{6}{p} + \frac{5}{p+2} + \frac{4}{p-3}.$$

По таблице оригиналов находим:

$$\frac{1}{p} \doteq 1,\ \frac{1}{p+2} \doteq e^{-2t},\ \frac{1}{p-3} \doteq e^{3t}.$$

Тогда получаем:

$$y(t) = 6 + 5\mathrm{e}^{-2t} + 4\mathrm{e}^{3t}.$$

3 Решить задачу Коши

$$x'' + 4x = f(t),$$
$$x(0) = x'(0) = 0,$$

где

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad t < 0, \\ 2t, & \text{при} \quad 0 \le t \le 1, \\ 4 - 2t, & \text{при} \quad 1 \le t \le 2, \\ 0, & \text{при} \quad t > 2. \end{cases}$$

Решение. С помощью единичной функции Хевисайда запишем $f(t)$ одним аналитическим выражением:

$$f(t) = 2t\eta(t) - 2t\eta(t-1) + (4-2t)\eta(t-1) - (4-2t)\eta(t-2) =$$
$$= 2t\eta(t) - 4(t-1)\eta(t-1) + 2(t-2)\eta(t-2).$$

Применяя формулу

$$f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau}F(p),$$

получим

$$f(t) \doteq \frac{2}{p^2} - \frac{4}{p^2}e^{-p} + \frac{2}{p^2}e^{-2p} = \frac{2}{p^2}\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right).$$

Полагая $x(t) \doteq X(p)$ и учитывая начальные условия, получим

$$x''(t) \doteq p^2 X(p)$$

Операторное уравнение имеет вид

$$p^2 X(p) + 4X(p) = \frac{2}{p^2}\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right).$$

Откуда

$$X(p) = \frac{2\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right)}{p^2\left(p^2 + 4\right)} = \left(\frac{1}{2p^2} - \frac{1}{2\left(p^2+4\right)}\right)\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right)$$

.

Итак,

$$X(p) = \frac{1}{2p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-2p}}{2p^2} - \frac{1}{2\left(p^2+4\right)} + \frac{e^{-p}}{p^2+4} - \frac{e^{-2p}}{2\left(p^2+4\right)} \doteq$$

$$\doteq \frac{1}{2}t\eta(t) - (t-1)\eta(t-1) + \frac{1}{2}(t-2)\eta(t-2) - \frac{1}{4}\sin 2t\eta(t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sin 2(t-1)\eta(t-1) - \frac{1}{4}\sin 2(t-2)\eta(t-2).$$

Преобразуя, получим:

$$x(t) = \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\eta(t) + \left(\frac{\sin 2(t-1)}{2} - (t-1)\right)\eta(t-1) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}(t-2) - \frac{\sin 2(t-1)}{4}\right)\eta(t-2).$$

4 Решить задачу Коши

$$x''(t) + x'(t) = t,$$

$$x(1) = 1,\ x'(1) = 0.$$

Решение. Положим $t = \tau + 1$. Тогда $x(t) = x(\tau+1) = \tilde{x}(\tau)$. Значит,

$$\tilde{x}''(\tau) + \tilde{x}'(\tau) = \tau + 1,$$

$$\tilde{x}(0)=1,\ \tilde{x}'(0)=0,$$

так как значению $t=1$ отвечает значение $\tau=0$.

Пусть $\tilde{x}(\tau)\doteq X(p)$. Тогда

$$\tilde{x}'(\tau)=pX(p)-1,$$
$$\tilde{x}''(\tau)=p^2X(p)-p,$$

и операторное уравнение примет вид:

$$p^2X(p)-p+pX(p)-1=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}.$$

Решая уравнение, находим $X(p)$

$$X(p)=\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p}=\frac{\tau^2}{2}+1\doteq\tilde{x}(\tau)$$

Заменив τ на $t-1$, получим решение $x(t)$ исходной задачи Коши

$$x(t)=\frac{(t-1)^2}{2}+1.$$

5 Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'-2y-4z=\cos t,\\ z'+y+2z=\sin t,\end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$ и $z(0)=0$.

Решение. Пусть $y(t)\doteq Y(p)$ и $z(t)\doteq Z(p)$. Применяя преобразование Лапласа к данной системе, получим систему операторных уравнений

$$\begin{cases} (-2+p)Y-4Z=\dfrac{p}{p^2+1},\\ Y+(2+p)Z=\dfrac{1}{p^2+1}.\end{cases}$$

Определитель данной системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}-2+p & -4\\ 1 & 2+p\end{vmatrix}=p^2.$$

Тогда решение относительно изображений есть

$$Y(p)=\frac{p^2+2p+4}{p^2\left(p^2+1\right)}=\frac{4}{p^2}+\frac{2}{p}-\frac{2p+3}{p^2+1},$$

$$Z(p)=-\frac{2}{p^2\left(p^2+1\right)}=-\frac{2}{p^2}+\frac{2}{p^2+1}.$$

Переходя от найденных изображений к оригиналам, при $t>0$ получим:

$$y(t)=4t+2-2\cos t-3\sin t,$$

$$z(t)=-2t+2\sin t.$$

6 Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'-2x-3y=3e^{2t}, \\ y'+3x-2y=0, \end{cases}$$

удовлетворяющую начальным условиям $x(0)=0$, $y(0)=1$

Решение. Пусть $x(t)\doteq X(p)$, $y(t)\doteq Y(p)$. Тогда

$$x'(t)\doteq pX(p),$$

$$y'(t)\doteq pY(p)-1,$$

$$e^{2t}\doteq\frac{1}{p-2}.$$

Переход к уравнениям в изображениях дает систему операторных уравнений

$$\begin{cases} pX(p)-2X(p)-3Y(p)=\dfrac{3}{p-2}, \\ pY(p)+3X(p)-2Y(p)=1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} X(p)(p-2)-3Y(p)=\dfrac{3}{p-2}, \\ Y(p)(p-2)+3X(p)=1. \end{cases}$$

Решаем систему по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p-2 & -3 \\ 3 & p-2 \end{vmatrix}=(p-2)^2+9,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \dfrac{3}{p-2} & -3 \\ 1 & p-2 \end{vmatrix} = 3+3=6,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p-2 & \dfrac{3}{p-2} \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = p-2-\frac{9}{p-2} = \frac{(p-2)^2-9}{p-2}.$$

Тогда

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{6}{(p-2)^2+9} \doteq 2e^{2t}\sin 3t;$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{(p-2)^2-9}{(p-2)\left((p-2)^2-9\right)} = \frac{2(p-2)}{(p-2)^2+9} - \frac{1}{p-2} \doteq$$

$$\doteq 2e^{2t}\cos 3t - e^{2t}.$$

Итак, решение системы

$$\begin{cases} x = 2e^{2t}\sin 3t, \\ y = e^{2t}(2\cos 3t - 1). \end{cases}$$

7 Решить дифференциальное уравнение $x'' - x = \dfrac{1}{e^t+2}$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x'(0) = 0$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим вспомогательное уравнение $\tilde{x}'' - \tilde{x} = 1$, удовлетворяющее начальным условиям $\tilde{x}(0) = \tilde{x}'(0) = 0$.

Применяя операционный метод, находим изображение:

$$\tilde{X}(p) = \frac{1}{p(p^2-1)}$$

и соответствующий ему оригинал $\tilde{x}(t) = \int\limits_0^t \operatorname{sh}\tau\, d\tau = \operatorname{ch} t - 1$.

Тогда решение исходного дифференциального уравнения есть:

$$x(t) = \int\limits_0^t \frac{1}{1+e^\tau}\operatorname{sh}(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}\left(e^t - te^t - 1\right) + \operatorname{sh} t \ln\frac{1+e^t}{2}.$$

8 Найти переходные значения тока и напряжений (i, u_r, u_C) в цепи, изображенной на рисунке 26, при переключении рубильника

P из положения 1 в положение 2, если $U = 100$ В, $r = 100$ Ом, $C = 10$ мкФ.

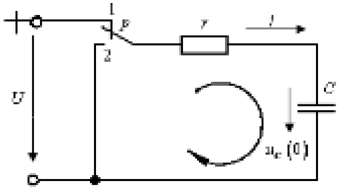

Рисунок 26 – Электрическая цепь к типовому примеру 8

Решение. Будем считать, что до переключения рубильника из положения 1 в положение 2 конденсатор C был заряжен до напряжения источника U. Если обход контура взять совпадающим с ходом стрелки часов, то начальное напряжение на конденсаторе $u_C(0)$ считается положительным: $u_C(0) = U = 100$ В. Операторное сопротивление контура

$$Z(p) = r + \frac{1}{pC}.$$

Внешних источников э. д. с. в контуре нет.

Изображение внутренней э. д. с. (начальной э. д. с. емкости) есть

$$\frac{-u_C(0)}{p} = \frac{-U}{p} = F(p).$$

По закону Ома в операторной форме имеем

$$I(p) = \frac{F(p)}{Z(p)} = \frac{\dfrac{-U}{p}}{r + \dfrac{1}{pC}} = \frac{-UC}{rCp + 1}.$$

Изображение тока переходного процесса удовлетворяет условиям применения второй теоремы разложения. Поэтому можно записать

$$I(p) = \frac{-UC}{rCp + 1} = \frac{P(p)}{Q(p)},$$

где $P(p) = -UC = -100 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = -10^{-3}$,

$Q(p) = rCp + 1$,

$$\alpha_1 = -\frac{1}{rC} = -\frac{1}{100 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = -10^3,$$

$$P(\alpha_1) = -10^{-3},$$

$$Q^{'}(p) = rC = 100 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 10^{-3},$$

$$Q^{'}(\alpha_1) = 10^{-3}.$$

В результате получаем мгновенное значение тока переходного процесса в виде:

$$i = i(t) = \frac{P(\alpha_1)}{Q^{'}(\alpha_1)} e^{\alpha_1 t} = \frac{-10^{-3}}{10^{-3}} e^{-10^3 t} = -e^{-1000\,t} \text{ А.}$$

Отрицательный знак тока означает, что при разряде конденсатора C через явное сопротивление r ток $i(t)$ направлен в сторону, противоположную направлению обхода контура, выбранного раньше. Мгновенное значение напряжения на активном сопротивлении в переходном процессе также отрицательно:

$$u_r = ri = -100e^{1000\,t} \text{ В.}$$

Мгновенное значение переходного напряжения на конденсаторе, определяемое по второму закону Кирхгофа $u_C + ri = 0$ есть

$$u_C = -ri = -u_r = 100e^{-1000\,t} \text{ В.}$$

Характер изменения i и u_C в переходном режиме показан на рисунке 27.

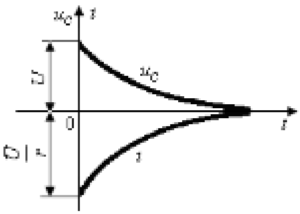

Рисунок 27 – Характер изменения i и u_C в переходном режиме

Тестовые задания для итогового контроля по разделу «Функции комплексной переменной»

Вариант 1

1 По определению логарифмическая функция комплексной переменной имеет вид:

____ .

2 Для того чтобы в точке $z = x + iy$ функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ была дифференцируемой необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ были дифференцируемы в точке $(x;y)$ как функции двух действительных переменных x и y, и выполнялись условия Коши-Римана:

а) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

3) Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D. Тогда для любой точки $z_0 \in D$ и кусочно-гладкого замкнутого контура Γ, целиком лежащего в области D и охватывающего точку z_0 справедливо равенство:

____ .

4) Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число, определяемое формулой:

____ .

5) Найти все значения функции $f(z) = \sqrt[3]{z} - z$ в точке $z_0 = \sqrt{3} - i$

.

6) Найти область аналитичности функции $f(z) = z - e^z$.

7) $\int_{\Gamma}\left(z^2-z\right)dz$, где Γ – дуга окружности $|z|=1$, $0\le\arg z\le\pi$.

8) Вычеты функции $f(z)=\dfrac{z+1}{z^3-z^2}$ в изолированных особых точках равны:

а) -2; 2; б) 0; 2; в) – 1; 0.

9) Вычет функции $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$ изолированной особой точке равен:

а) -1; б) -1/2; в) 1/2.

10) Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^2+z}$.

Вариант 2

1 По определению общая показательная функция комплексной переменной имеет вид:

____ .

2 Производная аналитической функции $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ находится по формулам:

а) $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

б) $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial y}-i\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

в) $f'(z)=\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

3) Пусть $f(z)$ аналитическая в области D функция и на ее границе Γ. Тогда функция $f(z)$ бесконечно дифференцируема в этой области и ее производная n-го порядка в точке $z_0\in D$ находится по формуле:

____ .

4) Если z_0 – полюс *n*-го порядка функции $f(z)$, то вычет в этой точке вычисляется по формуле:

____ .

5) Найти все значения функции $f(z) = \sqrt[3]{z} - z$ в точке $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$

.

6) Найти область аналитичности функции $f(z) = z + e^{z}$.

7) $\int\limits_{\Gamma} \left(z^2 + z\right) dz$, где Г – дуга окружности $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$.

8) Вычет функции $f(z) = \dfrac{z-1}{z^3 + z^2}$ изолированной особой точке равен:

а) -2; 2; б) 0; 2; в) 1; 0.

9) Вычет функции $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ изолированной особой точке равен:

а) 1; б) – 1; в) 0.

10) Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{z^2 (z+3)}$.

Деловые игры

Деловая игра «$1\times2\times4\times8$» по теме «Приложения вычетов»

Цель:

– совместить индивидуальную и групповую работу;

– развить умение принимать групповое решение;

– выработать навыки использования теории вычетов для вычисления интегралов.

Количество участников: до 24 человек.

Проведение:

Шаг 1 Преподаватель заранее предлагает студентам подобрать и решить по 5 задач.

Шаг 2 По просьбе педагога студенты случайным образом разбиваются на 2 группы, в рамках каждой группы рассчитываются на первый-двенадцатый и объединяются в пары: «первый» номер из 1-ой группы с «первым» из 2-ой группы, «второй» номер из 1-ой группы со «вторым» из 2-ой группы и так далее. Студенты в парах обмениваются заданиями и решают. Затем они сверяют полученные решения с готовыми ответами и выставляют друг другу оценки.

Шаг 3 Из имеющихся заданий каждая пара составляет новое задание из 5 задач и обменивается ими с другой случайным образом выбранной парой. Сверяя полученные решения с правильными ответами, каждая пара оценивает соответствующую ей пару.

Шаг 4 Завершив работу по парам, студенты объединяются в «четверки», чтобы выработать новое задание и продолжить процесс дальше.

Шаг 5 На данном этапе «четверки» объединяются в «восьмерки» (всего три группы). Преподаватель предлагает каждой группе по одной новой задаче. В результате обсуждения студенты должны выработать решение. Затем педагог предоставляет слово каждой группе с целью презентации полученного результата.

Примечание:

– преподавателю необходимо четко определить количество времени для проведения каждого этапа;

– желательно контролировать каждый этап;

– задания не должны быть сложными, чтобы студенты могли в течении отведенного времени их решить;

– работу можно остановить на этапе «четверок», если процесс решения задач занимает много времени;

– в результате игры каждый студент получает оценку, состоящую из баллов, полученных за составленное задание, за работу в паре, четверке, восьмерке.

Деловая игра «Карусель» по теме «Преобразование Лапласа

Цель:

– сочетать работу в парах;

– усвоить теоретический материал.

Количество участников: до 30 человек.

Время проведения: 45 минут

Проведение:

Шаг 1 Преподаватель предлагает студентам самостоятельно изучить тему «Преобразование Лапласа», подробно разобрать доказательства свойств интеграла Лапласа, воспользовавшись литературой, приведенной в списке литературы данного пособия.

Шаг 2 По просьбе педагога студенты случайным образом разбиваются на 2 группы. Студенты садятся друг напротив друга, образуя 2 круга – внешний и внутренний. Таким образом у каждого студента есть партнер для общения.

Шаг 3 Преподаватель формулирует одно из свойств интеграла Фурье, предлагает студентам в течение нескольких минут доказать его друг другу.

Шаг 4 Студенты внешнего круга перемещаются на один стул по ходу часовой стрелки и образуют новые пары, в которых снова проводится доказательство того же свойства.

Шаг 5 Студенты внутреннего круга перемечаются на один стул против часовой стрелки. Вновь образуются новые пары. Итак далее несколько раз.

Шаг 6 Предлагается для доказательства следующее свойство интеграла Фурье с последующим выполнение шагов 3, 4, 5.

Шаг 7 После рассмотрения всех свойств интеграла Лапласа, преподаватель делит студентов на несколько групп, предлагает каждой группе сформулировать и записать доказательство отдельных свойств (заранее выбранных преподавателем), проводит оценивание записанных доказательств.

Задания к контрольным работам

Контрольная работа по разделу «Гармонический анализ»

Вариант 1

1 Разложить в тригонометрический ряд Фурье функции:

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{2x}{\pi} & \text{при} \quad -\pi\le x<0,\\ 0 & \text{при} \quad 0<x\le\pi.\end{cases}$$

2 Разложить на промежутке $[0;\pi]$ в ряд Фурье функцию $f(x)=\frac{1}{2}x+4$, доопределив ее на $[-\pi;0]$:

а) четным, б) нечетным способом.

3 Разложить на промежутке $[-1;1]$ функцию $f(x)=2x-5$.

4 Разложить на промежутке $[0;\pi]$ ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=x^2+1$

Вариант 2

1 Разложить в тригонометрический ряд Фурье функции:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad -\pi\le x<0,\\ x & \text{при} \quad 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

2 Разложить на промежутке $[0;\pi]$ в ряд Фурье функцию $f(x)=\frac{3}{2}-x$, доопределив ее на $[-\pi;0]$:

а) четным, б) нечетным способом.

3 Разложить на промежутке $[-1;1]$ функцию $f(x)=2x+3/$

4 Разложить на промежутке $[0;\pi]$ ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=x^3-1$

Контрольная работа 1 по разделу «Функции комплексной переменной»

Вариант 1

1 Вычислить:

а) $\frac{1-2i}{2-i}$; б) $(-1+\mathrm{i})^{12}$; в) $\ln\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$;

г) $\frac{(z_2-z_3)z_1}{z_2}$ в точках $z_1=1-i$; $z_2=2-3i$; $z_3=3+i$.

2 Найти все значения корня $\sqrt[3]{-i}$ и изобразить их в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

3 Вычислить значение $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{1+i}$. Ответ записать в тригонометрической или алгебраической формах.

4 Выяснить, является ли функция $w=z\bar{z}^2$ аналитической.

5 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, если $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ и $f(0) = 0$.

6 Найти угол поворота φ и коэффициента растяжения ρ функции $w = z^2 + z$ в точке $z_0 = 1 + i$.

7 Вычислить $\int_\Gamma \bar{z}\, dz$, где Г есть верхняя половина окружности $|z| = 2$.

Вариант 2

1 Вычислить:

а) $\frac{2+i}{1-i}$; б) $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{80}$; в) $\operatorname{ch}\frac{\pi i}{2}$;

г) $\frac{(2z_1 - z_2)z_3}{z_2}$ в точках $z_1 = -1 + i$; $z_2 = 3 - i$; $z_3 = 4 + 2i$.

2 Найти все значения корня $\sqrt[3]{-8}$ и изобразить их в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

3 Вычислить значение $\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^{1+i}$. Ответ записать в тригонометрической или алгебраической формах.

4 Выяснить, является ли функция $w = e^{z^2}$ аналитической.

5 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, если $u(x,y) = 2\sin x\, ch\, y - x$ и $f(0) = 0$.

6 Найти угол поворота φ и коэффициента растяжения ρ функции $w = z^2$, в точке $z_0 = 2 - i$.

7 Вычислить $\int_\Gamma \operatorname{Im} z\, dz$ где Г есть отрезок от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = i$.

Контрольная работа 2 по разделу «Функции комплексной переменной»

Вариант 1

1 Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{e^{z^2}}{(z-1)z^2}\,dz.$$

2 Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$ в точке $z_0=0$.

3 Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в точке z_0

а) $f(z)=\frac{\sin z}{z^4},\ \ z_0=0;$ б) $f(z)=\frac{1}{z^2+z},\ \ z_0=-1.$

4 Найти особые точки и определить их характер функции $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$.

5 Найти вычеты функции $f(z)=\frac{e^z}{z^2(z-1)}$ в её особых точках.

6 Вычислить интегралы:

а) $\oint_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1}\frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}dz;$ б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2};$ в) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+4}dx.$

Вариант 2

1 Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-1|=4} \frac{e^{z+1}}{(z+2)(z-1)^2}\,dz.$$

2 Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=\frac{1}{z-3}$ в точке $z_0=-1$.

3 Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в точке z_0

а) $f(z)=\frac{1-e^{-z}}{z^3},\ \ z_0=0;$ б) $f(z)=\frac{1}{z^2+1},\ \ z_0=i.$

4 Найти особые точки и определить их характер функции $f(z)=\frac{\cos z}{(z-1)^2}$.

5 Найти вычеты функции $f(z)=\frac{e^z-1}{z^2+z}$ в её особых точках.

6 Вычислить интегралы:

а) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}}z^2\sin\frac{1}{z}dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2};$ в) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}dx.$

Контрольная работа по разделу «Операционное исчисление»

Вариант 1

1 Найти изображение функций:

а) $f(t) = e^{2t}\sin 2t$;

б) $f(t) = t^2(\sin t + e^{4t})$;

в) $f(t) = \frac{1-\cos t}{t}$.

2 Найти оригиналы $f(t)$ для изображений $F(p)$:

а)$F(p) = \frac{1}{p^2+2p-3}$; б) $F(p) = \frac{2e^{-p}}{p^3}$.

3 Методом операционного исчисления решить задачи Коши:

а) $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, x(0) = 0, x'(0) = 1$;

б) $\begin{cases} y' + z = 2\sin t, \\ z' + y = -1, \end{cases}$ $y(0) = 0, z(0) = 1.$

Вариант 2

1 Найти изображение функций:

а) $f(t) = e^{-t}t^3$;

б) $f(t) = t^2(\cos 2t + e^{2t})$;

в) $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}$.

2 Найти оригиналы $f(t)$ для изображений $F(p)$:

а) $F(p) = \frac{4}{p^2+5p+6}$ б) $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1}$.

3 Методом операционного исчисления решить задачи Коши:

а) $x'' + 2x' + x = \sin t$, $x(0) = 0, x'(0) = 1$;

б) $\begin{cases} y' - z = 5\cos 2t, \\ z' - y = 2, \end{cases}$ $y(0) = -1, z(0) = 0.$

Примерный перечень вопросов к экзамену

(* отмечены вопросы, содержащие доказательство)

1 Метрические, линейные и гильбертовы пространства.
2 Ортогональные системы функций
3 Основная тригонометрическая система.
4 *Ряд Фурье по ортонормированной системе функций.
5 *Экстремальное свойство коэффициентов Фурье.
6 *Неравенство Бесселя.
7 *Сходимость ряда Фурье в средне квадратичном. Равенство Парсеваля-Стеклова.

8 Ряд Фурье для периодической функции с периодом $T = 2l$.

9 Тригонометрический ряд Фурье.

10 Признаки сходимости тригонометрического ряда Фурье.

11 *Тригонометрический ряд Фурье для четных и нечетных функций.

12 Разложение непериодических функций в тригонометрический ряд Фурье.

13 Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье.

14 *Комплексная форма интеграла Фурье.

15 *Тригонометрическая форма интеграла Фурье. Синус и косинус преобразования Фурье.

16 *Свойства преобразования Фурье.

17 *Свертка функций.

18 *Понятие комплексного числа. Операции сложения, умножения, вычитания и деления комплексных чисел.

19 *Алгебраическая форма комплексного числа. Геометрическое представление комплексного числа.

20 *Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

21 Множества точек на комплексной плоскости.

22 *Определение функции комплексного переменного.

23 Геометрическая интерпретация понятия функции комплексной переменной.

24 Определение предела функции комплексной переменной.

25 Теоремы о пределах.

26 Непрерывность функций комплексной переменной. Свойства непрерывных функций.

27 Определение производной функции комплексной переменной. Дифференциал.

28 *Условия Коши-Римана.

29 *Сопряженные гармонические функции.

30 *Геометрический смысл модуля и аргумента производной.

31 Понятие конформного отображения.

32 Основные функции комплексной переменной.

33 *Определение интеграла от функции комплексной переменной.

34 *Связь интеграла комплексной переменной с криволинейным интегралом второго рода

35 *Свойства интегралов по комплексной переменной.

36 *Основная теорема Коши.

37 *Формула Коши.

38 *Теорема о среднем для аналитических функций.

39 *Принцип максимума модуля аналитической функции.

40 Интеграл типа Коши.

41 Теорема Коши-Лиувилля. Теорема Морера.

42 Ряды с комплексными числами.

43 Ряды функций комплексной переменной.

44 Равномерная сходимость функционального ряда. Признак Вейерштрасса.

45 Степенные ряды.

46 *Ряд Тейлора. Голоморфные функции.

47 Ряд Лорана.

48 Разложение аналитической функции в ряд Лорана.

49 Классификация изолированных особых точек аналитической функции.

50 Разложение аналитической функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

51 *Определение вычета. Основная теорема о вычетах

52 *Вычисление вычетов функции относительно полюса.

53 *Логарифмический вычет.

54 *Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки.

55 *Теорема о сумме вычетов.

56 Оригинал и его свойства.

57 Определение преобразования Лапласа.

58 *Существование, необходимое условие, единственность оригинала.

59 *Свойства преобразования Лапласа: линейность, подобие, запаздывание.

60 *Свойства преобразования Лапласа: опережение, затухание.

61 *Дифференцирование оригинала.

62 *Дифференцирование изображения.

63 *Изображение оригинала.

64 *Интегрирование изображения.

65 *Умножение изображений. Формула Дюамеля.

66 Теоремы разложения.

67 Обратное преобразование Лапласа.

68 Приложение операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений.

Типовые задачи к экзамену

1 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{3^n}$.

2 Найти радиус сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2-i} \right)^n$.

3 Разложить функцию $w = \sin(z-2)$ в ряд Тейлора по степеням $z+1$.

4 Определить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (z-2i)^n}$.

5 Разложить в ряд Лорана функцию $w = z^3 \sin \frac{1}{z}$ в окрестности точки $z_0 = 0$.

6 Разложить в ряд Лорана функцию $w = \frac{1}{z^2 - 4z + 3}$ в кольце $1 < |z| < 3$.

7 Найти вычеты в особых точках функции $w = \frac{1}{z^3 - 2z}$.

8 Вычислить интеграл с помощью интегральной формулы Коши $\int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2 - z}$.

9 Найти действительную и мнимую части функции $w = e^z + z^2$.

10 Найти значения модуля и главные значения аргумента функции $w = \cos 2z$ в точке $z_0 = \frac{\pi}{4} i$.

11 Пользуясь условиями Коши-Римана, выяснить, является ли функция аналитической, хотя бы в одной точке $w = z \cdot \bar{z} + 2z$.

12 Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0 = 0$ функции $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ и значению $f(0) = 0$.

13 Найти изображение функции $f(t) = t \cdot e^t$.

14 Вычислить интеграл: $\int\limits_{\Gamma} z \operatorname{Im} z^2 dz$, где интегрирование функции комплексной переменной вдоль пути $\Gamma = \{(x, y) |\quad y = x;\ A(0;0);\ B(1;i)\}$

15 Найти изображение функции $f(t) = \cos^2 t$.

16 Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображениях $w = z + z^2$ в точке $z_0 = 1 + i$.

17 Найти интеграл Фурье для функции $f(z) = \begin{cases} e^x & \text{при} \quad x \ge 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$

18 Вычислить интеграл с помощью интегральной формулы Коши $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z^2 + 5z}$.

19 Разложить функцию $f(x) = 3x - 1$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$.

20 Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа $z = -\sqrt{3} + i$.

21 Найти изображение функции $f(t) = t^2 \cos t$.

22 Найти косинус преобразование Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad x \le 0, x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

23 Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа $z = 1 - \sqrt{3}\, i$.

24 Вычислить значение выражения $\left(1 + \sqrt{3}\, i\right)^{10}$, используя тригонометрическую запись комплексного числа.

25 Найти все значения корня $\sqrt[4]{1 - i}$ и изобразить в комплексной плоскости.

26 Изобразить множество точек на плоскости комплексной переменной $\mathbb{C}$, заданное условием $E = \{z \mid |z - i| \le 1, 1 \le \operatorname{Im} z \le 2\}$.

27 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z+1)} dz$, используя теорему Коши о вычетах.

28 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin\frac{1}{z} dz$, используя теорему Коши о вычетах.

29 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin \pi z}{z^2 - z} dz$, используя теорему Коши о вычетах.

30 Найти в особых точках вычеты функции $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z+3)}$.

31 Вычислить интеграл с помощью интеграла типа Коши $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$.

32 Найти в особых точках вычеты функции $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}$.

33 Найти изображение оригинала $f(t) = \sin^2 t$, $t \geq 0$

34 Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3}$.

35 Решить задачу Коши $\begin{cases} x' - x = 1, \\ x(0) = -1, \end{cases}$ используя преобразование Лапласа.

Индивидуальные домашние задания по разделу «Гармонический анализ»

1 На промежутке $[0;\pi]$ разложить в ряд Фурье а) по косинусам, б) по синусам функции (нарисовать в обоих случаях графики суммы рядов для $n = 1, 2, 3$):

1.1 $f(x) = 4x + 6.$ **1.2** $f(x) = 6x - 3.$

1.3 $f(x) = 2x + 8.$ **1.4** $f(x) = -x + 2.$

1.5 $f(x) = 3x + 5.$ **1.6** $f(x) = -x + 1.$

1.7 $f(x) = 4x + 3.$ **1.8** $f(x) = 9x + 4.$

1.9 $f(x) = 5x + 5.$ **1.10** $f(x) = 2x + 7.$

1.11 $f(x) = 3x + 6.$ **1.12** $f(x) = 7x - 6.$

1.13 $f(x) = 3x - 6.$ **1.14** $f(x) = 2x + 6.$

1.15 $f(x) = 3x + 6.$ **1.16** $f(x) = 4x - 6.$

1.17 $f(x) = 2x - 6.$ **1.18** $f(x) = x + 6.$

1.19 $f(x) = -9x + 1.$ **1.20** $f(x) = 9x - 6.$

1.21 $f(x) = 2x - 9.$ **1.22** $f(x) = 3x - 9.$

1.23 $f(x) = x + 5.$ **1.24** $f(x) = 8x - 1.$

1.25 $f(x) = 3x + 1.$ **1.26** $f(x) = 8x + 3.$

1.27 $f(x) = 5x - 7.$ **1.28** $f(x) = 4x + 6.$

1.29 $f(x) = -x + 6.$ **1.30** $f(x) = 5x + 6.$

2 На отрезке $[-1;1]$ разложить в ряд Фурье функции:

2.1 $f(x) = 2|x| - 3.$ **2.2** $f(x) = 2|x| + 1.$

2.3 $f(x) = |x| - 5.$ **2.4** $f(x) = -3|x| + 2.$

2.5 $f(x) = 4|x| + 8.$ **2.6** $f(x) = -|x| - 6.$

2.7 $f(x) = -5|x| + 1.$ **2.8** $f(x) = -2|x| - 4.$

2.9 $f(x) = 3|x| + 7.$ **2.10** $f(x) = -2|x| + 5.$

2.11 $f(x) = 7|x| - 1.$ **2.12** $f(x) = |x| + 9.$

2.13 $f(x) = |x| + 1.$ **2.14** $f(x) = 5|x|.$

2.15 $f(x) = -6|x| + 2.$ **2.16** $f(x) = -3|x| + 1.$

2.17 $f(x) = 5|x| + 2.$ **2.18** $f(x) = -|x| - 6.$

2.19 $f(x) = |x| - 8.$ **2.20** $f(x) = -4|x| + 1.$

2.21 $f(x) = -5|x| + 7.$ **2.22** $f(x) = 2|x| - 8.$

2.23 $f(x) = 7|x| + 2.$ **2.24** $f(x) = |x| + 8.$

2.25 $f(x) = -3|x| + 7.$ **2.26** $f(x) = -|x| + 1.$

2.27 $f(x) = 5|x| + 2.$ **2.28** $f(x) = |x| - 6.$

2.29 $f(x) = |x| - 8.$ **2.30** $f(x) = 4|x| + 1.$

3 Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции (нарисовать графики суммы рядов для $n = 1$, 2, 3):

3.1

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x \text{ при } -\pi \le x \le 0, \\ 1 \text{ при } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

3.2

$$f(x) = \begin{cases} -1 + 2x \text{ при } -\pi \le x \le 0, \\ 1 \text{ при } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

3.3

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x \text{ при } -\pi \le x \le 0, \\ -1 \text{ при } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

3.4

$$f(x) = \begin{cases} -1 - 2x \text{ при } -\pi \le x \le 0, \\ 0 \text{ при } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

3.5

$$f(x) = \begin{cases} -x \text{ при } -\pi \le x \le 0, \\ 2 \text{ при } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

3.6

$$f(x) = \begin{cases} 5 + 2x \text{ при } -\pi \le x \le 0, \\ -1 \text{ при } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

3.7

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 \text{ при } -\pi \le x \le 0, \\ 7 \text{ при } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

3.8

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x \text{ при } -\pi \le x \le 0, \\ 3 \text{ при } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

3.9

$$f(x)=\begin{cases}1+2x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ -1 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.10

$$f(x)=\begin{cases}3-x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ -2 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.11

$$f(x)=\begin{cases}-3 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 1+2x \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.12

$$f(x)=\begin{cases}5x-1 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 1 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.13

$$f(x)=\begin{cases}-1 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ x-1 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.14

$$f(x)=\begin{cases}-2x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 2 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.15

$$f(x)=\begin{cases}4 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ x-1 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.16

$$f(x)=\begin{cases}1-2x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 3 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.17

$$f(x)=\begin{cases}4x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 1 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.18

$$f(x)=\begin{cases}-2+x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 2 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.19

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 2x-6 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.20

$$f(x)=\begin{cases}3+2x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 7 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.21

$$f(x)=\begin{cases}3 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 2x-5 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.22

$$f(x)=\begin{cases}2x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 9 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.23

$$f(x)=\begin{cases}2 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 5x-3 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.24

$$f(x)=\begin{cases}7+2x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 4 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.25

$$f(x)=\begin{cases}-3 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ x-1 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.26

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 2 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.27

$$f\left(x\right)=\begin{cases}6+2x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ -1 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.28

$$f\left(x\right)=\begin{cases}-2x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 9 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.29

$$f\left(x\right)=\begin{cases}5+x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ -2 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.30

$$f\left(x\right)=\begin{cases}1-3x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 3 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Индивидуальные домашние задания по разделу «Функции комплексной переменной»

ИДЗ 1 Аналитические функции

1 Проверить, являются ли аналитическими функции:

1.1 $f(z)=z\cdot\cos z$.

1.2 $f(z)=\overline{z}\cdot e^{z}$.

1.3 $f(z)=z\cdot\ln z$.

1.4 $f(z)=z+\sin z$.

1.5 $f(z)=e^{z}\cdot\operatorname{Re} z$.

1.6 $f(z)=z\cdot\operatorname{Im} z$.

1.7 $f(z)=\overline{z}\cdot\sin z$.

1.8 $f(z)=(\overline{z})^{2}+z$.

1.9 $f(z)=e^{\overline{z}}-1$.

1.10 $f(z)=e^{z}+z^{2}$.

1.11 $f(z)=z\cdot\overline{z}+e^{z}$.

1.12 $f(z)=\cos z\cdot\operatorname{Re} z$.

1.13 $f(z)=\ln z+\overline{z}$.

1.14 $f(z)=\ln\overline{z}-e^{z}$.

1.15 $f(z)=z\cdot\overline{z}-\dfrac{\overline{z}}{z}$.

1.16 $f(z)=\dfrac{z}{\overline{z}}$.

1.17 $f(z)=z-\operatorname{ch}\overline{z}$.

1.18 $f(z)=\sin\overline{z}$.

1.19 $f(z)=\operatorname{Re} e^{z}+\operatorname{Im} z$.

1.20 $f(z)=\operatorname{sh} z-z$.

1.21 $f(z)=2^{z^{2}}$.

1.22 $f(z)=3^{z}\cdot\operatorname{Im} z$.

1.23 $f(z)=\overline{z}\cdot\operatorname{Im} e^{2z}$.

1.24 $f(z)=\ln z^{2}$.

1.25 $f(z)=e^{z}+e^{\overline{z}}$.

1.26 $f(z)=\ln\overline{z}+z$.

1.27 $f(z)=3^{z}$.

1.28 $f(z)=\ln z+e^{2z}$.

1.29 $f(z)=\dfrac{\overline{z}}{z}-z$.

1.30 $f(z)=z^{\frac{1}{2}}+\overline{z}$.

2 Найти аналитические функции f по заданной действительной $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ части (предварительно проверив, что функция может быть действительной или мнимой частью аналитической функции):

2.1 $u(x,y) = 2x^2 - y^2 + x$.

2.2 $v(x,y) = e^{-2y} \cdot \cos x$.

2.3 $u(x,y) = e^{x+1} \cdot \cos y$.

2.4 $v(x,y) = \sin 2y \cdot \cos 2x$.

2.5 $v(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + 1$.

2.6 $v(x,y) = (y+1)^2 - x^2$.

2.7 $u(x,y) = \sin 2x \cdot \cos 2y$.

2.8 $u(x,y) = x^2 - (y+1)^2$.

2.9 $v(x,y) = 3x^2 \cdot y - 3y^2 - 2y$.

2.10 $u(x,y) = 2x \cdot (y+1)$.

2.11 $v(x,y) = 9x^2 \cdot y - 3y^3$.

2.12 $v(x,y) = 2x \cdot y + y$.

2.13 $v(x,y) = -\sin 2y \cdot \sin(2x-1)$

2.14 $v(x,y) = y + x \cdot y^2$.

2.15 $v(x,y) = x^3 - 3x \cdot y^2$.

2.16 $v(x,y) = 3x^2 \cdot y - y^3$.

2.17 $v(x,y) = -e^{-2y} \cdot \cos 2x + x$.

2.18 $u(x,y) = x^3 + 3x \cdot y^2$.

2.19 $u(x,y) = x^2 + y^2 + x \cdot y$.

2.20 $u(x,y) = e^x \cdot \sin y$.

2.21 $u(x,y) = \ln\left(2x^2 + y^2\right)$.

2.22 $v(x,y) = x^2 - y^2 - 1$.

2.23 $v(x,y) = y - e^{2x} \cdot \sin 2y$.

2.24 $u(x,y) = -y \cdot (4x+1)$

2.25 $v(x,y) = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

2.26 $v(x,y) = x + y$.

2.27 $u(x,y) = e^{x^2 - y^2} \cdot \cos 2xy$.

2.28 $u(x,y) = x^2 - y^2 - x$.

2.29 $v(x,y) = e^{x^2 - y^2} \cdot \sin 2xy$.

2.30 $v(x,y) = \sin x \cdot \operatorname{sh} y$.

3 Вычислить интегралы (в интегралах по замкнутому контуру контур обходит против часовой стрелки):

3.1 $\oint\limits_{\substack{|z|=1\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} z\cdot \operatorname{Re} z dz$.

3.2 $\oint\limits_{\substack{|z|=1\\ -\pi\le\varphi\le \pi}} \operatorname{Re} z^2 dz$.

3.3 $\oint\limits_{\substack{|z|=1\\ 0\le\varphi\le \pi}} z^2\cdot \operatorname{Im} z dz$.

3.4 $\oint\limits_{\substack{|z|=2\\ -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le \frac{\pi}{4}}} (z^2 - z) dz$.

3.5 $\oint\limits_{\substack{|z|=2\\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le \frac{\pi}{2}}} (z - \overline{z}^2) dz$.

3.6 $\int\limits_{\substack{y=x^2\\ z_1=0\\ z_2=1+i}} z\cdot \operatorname{Im} z dz$.

3.7 $\int\limits_{|z|=2} \overline{z}\cdot e^z dz$.

3.8 $\int\limits_{|z|=1} z\cdot e^{|z|^2} dz$.

3.9 $\int\limits_{\substack{|z|=1\\ 0\le\varphi\le \pi}} \overline{z}\cdot \operatorname{Im} z dz$.

3.10 $\int\limits_{\substack{|z|=1\\ 0\le\varphi\le \frac{\pi}{2}}} \operatorname{Im} 2z dz$.

3.11 $\int\limits_{\substack{y=x\\ z_1=0\\ z_2=1+i}} \left(z^2 + \overline{z}\right) dz$.

3.12 $\int\limits_{\substack{|z|=1\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} z\cdot \operatorname{Im} z dz$.

3.13 $\int\limits_{\substack{|z|=2\\ -\pi\le\varphi\le \pi}} z\cdot \operatorname{Re} z dz$.

3.14 $\int\limits_{\substack{|z|=2\\ 0\le\varphi\le \frac{\pi}{2}}} \operatorname{Im} z^2 dz$.

3.15 $\int\limits_{\substack{|z|=2\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} z\cdot \operatorname{Re} z^2 dz$.

3.16 $\int\limits_{\substack{y=x\\ z_1=0\\ z_2=1+i}} \left(1 + 2\overline{z}\right) dz$.

3.17 $\int\limits_{\substack{y=x\\ z_1=0\\ z_2=1+i}} z^2\cdot \operatorname{Im} z dz$.

3.18 $\int\limits_{|z|=3} z\cdot \operatorname{Im} z^2 dz$.

3.19 $\int\limits_{\substack{y=x\\ z_1=0\\ z_2=1+i}} z^2\cdot \operatorname{Re} z dz$.

3.20 $\int\limits_{\substack{y=x\\ z_1=0\\ z_2=1+i}} \left(\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z\right) dz$.

3.21 $\int\limits_{\substack{|z|=1\\0\le\varphi\le 2\pi}} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)\,dz$ **3.22** $\int\limits_{\substack{|z|=1\\-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}} (z-\overline{z})\,dz$.

.

3.23 $\int\limits_{\substack{|z|=1\\0\le\varphi\le\pi}} \operatorname{Re} z\,dz$. **3.24** $\int\limits_{\substack{|z|=1\\0\le\varphi\le\pi}} \operatorname{Im} z\,dz$.

3.25 $\int\limits_{\substack{y=x\\z_1=0\\z_2=1+i}} \overline{z}\,dz$. **3.26** $\int\limits_{\substack{|z|=1\\-\pi\le\varphi\le\pi}} \overline{z}\,dz$.

3.27 $\int\limits_{\substack{|z|=1\\0\le\varphi\le\pi}} z\cdot\overline{z}\,dz$. **3.28** $\int\limits_{\substack{|z|=1\\0\le\varphi\le 2\pi}} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z^2)\,dz$

.

3.29 $\int\limits_{\substack{y=-x\\z_1=1-i\\z_2=0}} z\cdot\overline{z}\,dz$. **3.30** $\int\limits_{\substack{y=x+1\\z_1=i\\z_2=1+i}} (1+3i-z^2)\,dz$.

4 Вычислить интегралы по замкнутому контуру с помощью интегральной формулы Коши (контур обходится против часовой стрелки), сделать чертеж:

4.1 $\int\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{ch} iz\,dz}{(z-1)^2\cdot(z-i)}$. **4.2** $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2\cdot(z-2)}dz$.

4.3 $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{i\cdot z}}{(z+2)^2\cdot z}dz$. **4.4** $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin \pi z\,dz}{(z-1)\cdot(z+1)^2}$.

4.5 $\int\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z-3i)\cdot(z+1)^2}$. **4.6** $\int\limits_{|z|=5} \frac{dz}{(z+4i)(z-2)^2}$.

4.7 $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{z^2}}{(z-1)\cdot z^2}dz$. **4.8** $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos z\,dz}{(z-i)^2(z-2)}$.

4.9 $\int\limits_{|z|=4} \frac{\sin z\,dz}{(z+2)^2\cdot(z-1)}$. **4.10** $\int\limits_{|z|=2} \frac{\pi\cdot z\,dz}{(z-1)^2(z-i)}$.

4.11 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=5} \frac{\cos^2 z\,dz}{(z-4)^2(z+1)}$.

4.12 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{i\cdot z^2}}{z^2\cdot(z-i)}dz$.

4.13 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos 2z\,dz}{(z+2)(z-2)^2}$.

4.14 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{(z+2i)dz}{(z-1)(z+1)^2}$.

4.15 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{\operatorname{th}\pi z\,dz}{(z+1)(z-2)^2}$.

4.16 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin\pi z\,dz}{(z-2)\cdot(z-1)^2}$.

4.17 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin z dz}{(z-1)^2(z+2)}$.

4.18 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2\,dz}{(z+i)^2(z-1)}$.

4.19 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos 2z}{z^2\cdot(z+2)}dz$.

4.20 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin 2z\,dz}{(z-1)^2\cdot(z+i)}$.

4.21 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{tg}\ z}{z\cdot(z+i)^2}dz$.

4.22 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{\operatorname{sh}\ \frac{\pi}{2}\cdot z}{z^2\cdot(z-2)}dz$.

4.23 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z}{z^2\cdot(z+2)}dz$.

4.24 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{z\cdot\operatorname{sh}\ z\,dz}{(z+i)\cdot(z-2)^2}$.

4.25 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{i\cdot z}}{z^2\cdot(z+2)}dz$.

4.26 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=5} \frac{zdz}{(z-2)^2(z+4)}$.

4.27 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^2dz}{(z-1)^2(z+3)}$.

4.28 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z(z-1)^2}dz$.

4.29 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{iz}dz}{(z-1)^2\cdot(z+1)}$.

4.30 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi z}{2}\,dz}{(z-3)\cdot(z+i)^2}$.

ИДЗ-2 Ряды Тейлора и Лорана

1 Разложить функции в ряд Тейлора по степеням $z - z_0$ и определить круг сходимости полученного ряда:

1.1 $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$, $z_0 = i$.

1.2 $f(z) = \dfrac{2}{z-1}$, $z_0 = i$.

1.3 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$, $z_0 = 0$.

1.4 $f(z) = \dfrac{z}{z+2}$, $z_0 = 1$.

1.5 $f(z) = e^{z+3}$, $z_0 = -1$.

1.6 $f(z) = e^{2z}$, $z_0 = i$.

1.7 $f(z) = \dfrac{1}{z+4}$, $z_0 = -1$.

1.8 $f(z) = \sin z \cos z$, $z_0 = 0$.

1.9 $f(z) = e^{z}$, $z_0 = -1$.

1.10 $f(z) = \cos 2z$, $z_0 = 0$.

1.11 $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$, $z_0 = 0$.

1.12 $f(z) = \cos^2 \dfrac{iz}{2}$, $z_0 = 0$.

1.13 $f(z) = e^{z}$, $z_0 = 1$.

1.14 $f(z) = \dfrac{1}{3z+1}$, $z_0 = -2$.

1.15 $f(z) = e^{2z}$, $z_0 = -1$.

1.16 $f(z) = e^{z+2}$, $z_0 = 1$.

1.17 $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$, $z_0 = -1$.

1.18 $f(z) = \dfrac{1}{z+2}$, $z_0 = 1$.

1.19 $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$, $z_0 = 0$.

1.20 $f(z) = \dfrac{1}{z-4}$, $z_0 = 1$.

1.21 $f(z) = \dfrac{z}{z^2-4z+3}$, $z_0 = 0$.

1.22 $f(z) = \dfrac{z}{z^2+4}$, $z_0 = 2$.

1.23 $f(z) = \dfrac{z}{z^2+4}$, $z_0 = i$.

1.24 $f(z) = \sin^2 z$, $z_0 = 0$.

1.25 $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$, $z_0 = 2$.

1.26 $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+4z}$, $z_0 = 0$.

1.27 $f(z) = \dfrac{1}{3-2z}$, $z_0 = 3$.

1.28 $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2-2z}$, $z_0 = 0$.

1.29 $f(z) = \sin z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

1.30 $f(z) = \ln z$, $z_0 = 1$.

2 Разложить функции в ряд Лорана в окрестности изолированных особых точек и определить область сходимости полученного ряда:

2.1 $f(z) = \dfrac{2z}{(z+1)(z-2)}$.

2.2 $f(z) = \dfrac{z-2}{(z+1)z}$.

2.3 $f(z) = \dfrac{z}{z^2+4}$.

2.4 $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2-3z+2}$.

2.5 $f(z) = \dfrac{z}{z^2+z-2}$.

2.6 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$.

2.7 $f(z) = \dfrac{1}{z^2-4}$.

2.8 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z}$.

2.9 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z-2}$.

2.10 $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$.

2.11 $f(z) = \dfrac{z}{z^2-4}$.

2.12 $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+4)}$.

2.13 $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)(z+2)}$.

2.14 $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2-5z+4}$.

2.15 $f(z) = \dfrac{z}{z^2+5z+4}$.

2.16 $f(z) = \dfrac{1}{z(z+4)}$.

2.17 $f(z) = \dfrac{1}{z^2-z}$.

2.18 $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$.

2.19 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z-3}$.

2.20 $f(z) = \dfrac{z}{z^2+4}$.

2.21 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$.

2.22 $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+1}$.

2.23 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-3)}$.

2.24 $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+3)}$.

2.25 $f(z) = \dfrac{z}{z^2+9}$

2.26 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z}$.

2.27 $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$.

2.28 $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$.

2.29 $f(z) = \dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$.

2.30 $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$.

3 Найти особые точки и определить их характер для функций:

3.1 $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$.

3.2 $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$.

3.3 $f(z)=\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z}$.

3.4 $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^2}$.

3.5 $f(z)=ze^{\frac{1}{z+i}}$.

3.6 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-2}$.

3.7 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$.

3.8 $f(z)=\dfrac{2}{z^2-1}$.

3.9 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$.

3.10 $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}+z^3$.

3.11 $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$.

3.12 $f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$.

3.13 $f(z)=(z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$.

3.14 $f(z)=\dfrac{e^{z+e}}{z+e}$.

3.15 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$

3.16 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$.

.

3.17 $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-1}$.

3.18 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3}$.

3.19 $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}$.

3.20 $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

3.21 $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$.

3.22 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$

.

3.23 $f(z)=\cos\dfrac{1}{z+\pi}$.

3.24 $f(z)=z^2\cdot\sin\dfrac{1}{z}$.

3.25 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

3.26 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+3z-4}$.

3.27 $f(z)=e^{\frac{1}{z+2}}$.

3.28 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}e^{\frac{1}{z-2}}$.

3.29 $f(z)=\dfrac{z^2+z-1}{z^3-z}$.

3.30 $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z-2)^2}$.

4 Найти вычеты в изолированных особых точках функций:

4.1 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$.

4.2 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2}\sin\dfrac{1}{z+1}$

.

4.3 $f(z)=\dfrac{z^4}{(z-1)^2}$.

4.4 $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z+1)^2}$.

4.5 $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$.

4.6 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$.

4.7 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$.

4.8 $f(z)=\cos\dfrac{z}{z-1}$.

4.9 $f(z)=\dfrac{2z^2+3z-1}{(z-1)\cdot z^2}$.

4.10 $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.

4.11 $f(z)=z^3\cdot e^{-\frac{1}{z}}$.

4.12 $f(z)=\dfrac{\cos^3 z}{z^3}$.

4.13 $f(z)=z\cdot\cos^2\dfrac{\pi}{z}$.

4.14 $f(z)=z\cdot e^{\frac{1}{z-1}}$.

4.15 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)^2}\cos\dfrac{1}{z-2}$

4.16 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^2}$.

.

4.17 $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^3}$.

4.18 $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)^2}$.

4.19 $f(z)=\dfrac{1}{z+z^3}$.

4.20 $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2}$.

4.21 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-2)^3}$.

4.22 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-2z+5}$.

4.23 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z^2+4)^2}$.

4.24 $f(z)=z^3\cdot\sin^2\dfrac{1}{z}$.

4.25 $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.

4.26 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z+3)}$.

4.27 $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-2)^2}$.

4.28 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2}$.

4.29 $f(z)=\dfrac{e^{z^2}}{z^3}$.

4.30 $f(z)=z^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{z}$.

ИДЗ-3 Вычисление интегралов с помощью вычетов

1 Вычислить с помощью основной теоремы теории вычетов интегралы (контур обходится против часовой стрелки):

1.1 $\displaystyle\int\limits_{z+1-i|=2}\frac{e^{iz}dz}{z^2+4}$.

1.2 $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2}\frac{z\cdot\cos z}{(z-1)^2}$.

1.3 $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z\cdot dz}{(z+1)\cdot z^2}$.

1.4 $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1}$.

1.5 $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{e^{2z}dz}{z^2+2z}$.

1.6 $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{z\cdot dz}{z^2+4}$.

1.7 $\displaystyle\int\limits_{|z+1-i|=3}\frac{e^z dz}{z^2+3z+2}$.

1.8 $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2}\frac{z^2\cdot dz}{(z-1)^3}$.

1.9 $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=5}\frac{e^{z^2}\cdot dz}{z^2+4z+4}$.

1.10 $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{\cos z\,dz}{z^2+2z}$.

1.11 $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=3}\frac{e^z\cdot dz}{z^2(z-2)}$.

1.12 $\displaystyle\int\limits_{|z|=4}\frac{z}{z+3}e^{\frac{1}{2z}}dz$.

1.13 $\displaystyle\int\limits_{|z+2|=1}\frac{e^z\cdot dz}{z(z+2)^2}$.

1.14 $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=2}\frac{z^2\cdot dz}{(z^2+1)^2}$.

1.15 $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z(z^2-1)}$.

1.16 $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2}\frac{dz}{(z-1)^2}$.

1.17 $\displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{z \cdot e^z}{z^2+4z}$.

1.18 $\displaystyle\oint_{|z+1|=2} \frac{\sin z}{(z+1)^2}$.

1.19 $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2+2iz}dz$.

1.20 $\displaystyle\oint_{|z-i|=3} \frac{z \cdot \sin z}{z^2+5z-6}dz$.

1.21 $\displaystyle\oint_{|z+i|=3} \frac{z \cdot dz}{z^2-2z-8}$.

1.22 $\displaystyle\oint_{|z+3|=2} \frac{z^2-z}{z^2+6z+10}dz$

1.23 $\displaystyle\oint_{|z+2i|=3} \frac{z \cdot e^z \cdot dz}{z^2+8z-20}$.

1.24 $\displaystyle\oint_{|z-2|=2} \frac{z \cdot dz}{(z-1)(z-2)}$.

1.25 $\displaystyle\oint_{|z-2|=2} \frac{z \cdot dz}{(z+1)(z-2)^2}$.

1.26 $\displaystyle\oint_{|z+2|=2} \frac{z \cdot dz}{(z+3)^2(z+5)}$

1.27 $\displaystyle\oint_{|z|=2} z \cdot e^{\frac{1}{z}}dz$.

1.28 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \sin^2\frac{1}{z}dx$.

1.29 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z \cdot dz}{z^3}$.

1.30 $\displaystyle\oint_{|z-2|=1} \frac{\cos z}{(z-2)^2}dz$.

2 Вычислить интегралы:

2.1 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$.

2.2 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}$.

2.3 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x}$.

2.4 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(1+\sin 2x)dx}{4+\cos x+3\sin x}$.

2.5 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos x}{2+\sin x}dx$.

2.6 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+3\cos x}$.

2.7 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-2\cos x+\sin x}$.

2.8 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-2\cos x}$.

2.9 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+2\sin x}$.

2.10 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4+3\cos x}$.

2.11 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

2.12 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-\sin x}$.

2.13 $\int_0^{2\pi} \frac{(1-\sin 2x)dx}{\sin x+\cos x+2}$.

2.14 $\int_0^{2\pi} \frac{(3\sin x+1)dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

2.15 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{2+\sin x+\cos x}$.

2.16 $\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2x}{8+\sin x}dx$.

2.17 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+2}dx$.

2.18 $\int_0^{2\pi} \frac{3\sin x+\cos x}{2+\cos x}dx$.

2.19 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{5+2\sin x}dx$.

2.20 $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{4+\cos x}dx$.

2.21 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{4+\sin x}dx$.

2.22 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x+\sin x}{2+\cos x}dx$.

2.23 $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x dx}{4-3\sin x+2\cos x}$

2.24 $\int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos 2x)dx}{3+\sin x+\cos x}$.

2.25 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{2+\sin x+\cos x}$.

2.26 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{13-12\cos x}dx$.

2.27 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\cos x}$.

2.28 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{5-4\cos x}dx$.

2.29 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\sin x}$.

2.30 $\int_0^{2\pi} \frac{(1-2\sin x)dx}{\cos^2 x+2\sin^2 x+3}$

.

3 Вычислить интегралы:

3.1 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

3.2 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

3.3 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

3.4 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

3.5 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

3.6 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2-x+1}dx$.

3.7 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

3.8 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x}{(x^2+25)^2}dx$.

3.9 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$.

3.10 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+x+1}dx$.

3.11 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$.

3.12 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$

3.13 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{(x^2+8x+25)^2}$.

3.14 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+9)^2}dx$.

3.15 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}dx$.

3.16 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx$.

3.17 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+5)^2}dx$.

3.18 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

3.19 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-4}{(x^2+9)^2}dx$.

3.20 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx$.

3.21 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+2}{(x^2+6x+18)^2}dx$

3.22 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+10)^2}$.

3.23 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+2x+17)^2}$.

3.24 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{3x-1}{(x^2+4)^2}dx$.

3.25 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x-1}{(x^2+81)^2}dx$.

3.26 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x-3}{(x^2+9)^2}dx$.

3.27 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+2)dx}{(x^2+2x+10)^2}$.

3.28 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+16)^2}dx$.

3.29 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+25)^2}dx$.

3.30 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+2}{(x^2-6x+18)^2}dx$.

4 Вычислить интегралы:

4.1 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2} dx$.

4.2 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 4x dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

4.3 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+4} dx$.

4.4 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x\, dx}{x^2+8x+25}$.

4.5 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x\, dx}{x^2+6x+18}$.

4.6 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

4.7 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2+1)^2} dx$.

4.8 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin 3x\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

4.9 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x\, dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

4.10 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x dx}{x^2+6x+10}$.

4.11 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x\, dx}{x^2+2x+10}$.

4.12 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+9)^2} dx$.

4.13 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x\, dx}{x^2+4x+13}$.

4.14 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{(x^2+1)^2} dx$.

4.15 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 7x}{x^2+6x+10} dx$.

4.16 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 3x}{x^2+2x+5} dx$.

4.17 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \sin 4x}{(x^2+1)^2} dx$.

4.18 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2 \cos 2x}{(x^2+1)^2} dx$.

4.19 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin 3x}{(x^2+4)^2} dx$.

4.20 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1} dx$.

4.21 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x\, dx}{x^2+4x+20}$.

4.22 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx$.

4.23 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+x+1}dx$.

4.24 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2-4x+5}$.

4.25 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\,dx}{(x^2-2x+10)^2}$.

4.26 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}dx$.

4.27 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4}dx$.

4.28 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4}dx$.

4.29 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+25)^2}dx$.

4.30 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+x+1}dx$.

Индивидуальные домашние задания по разделу «Операционное исчисление»

1 Используя свойства преобразования Лапласа, найти изображения функций:

1.1 а) $2t\sin 2t$, б) $\sin^2 t$.

1.2 а) $3t^2e^{2t}$, б) $\cos^2 t$.

1.3 а) $3t\cos 2t$, б) $\sin^4 t$.

1.4 а) $t^2\cos 2t$. б) $t^2\sin^2 t$.

1.5 а) $3t\cdot\mathrm{sh}3t$, б) $\cos^4 t$.

1.6 а) $3e^{-3t}\sin t$, б) $\mathrm{sh}^2 t$.

1.7 а) $4e^{3t}\cos t$, б) $\dfrac{\sin 2t}{t}$.

1.8 а) $e^t\,\mathrm{ch}\,t$, б) $\int\limits_0^t \cos 2\tau d\tau$.

1.9 а) $t\sin 3t$, б) $\int\limits_0^t \dfrac{\sin\tau}{\tau}d\tau$.

1.10 а) $2e^t\,\mathrm{ch}\,t$, б) $t^2\cos t$.

1.11 а) $-3t\cos 3t$, б) $\cos^3 t$.

1.12 а) $4t^3e^{-t}$, б) $e^{-t}\sin^2 t$.

1.13 а) $2t\,\mathrm{ch}\,2t$, б) $\sin^3 t$.

1.14 а) $4t\cdot\mathrm{sh}2t$, б) t^3e^{-t}.

1.15 а) $2e^{-4t}\sin 5t$, б) $\dfrac{\sin^2 t}{t}$.

1.16 а) $2t\cos^2 t$, б) $\mathrm{ch}^2 t$.

1.17 а) $2e^{-5t}\cos 4t$, б) $t\cdot\mathrm{ch}2t$.

1.18 а) $4t\cdot\mathrm{sh}2t$, б) t^3e^{2t}.

1.19 а) t^3e^{-2t}, б) t^3e^{-t}.

1.20 а) $e^{-2t}\sin 4t$, б) t^2e^{-2t}.

1.21 а) $t\cos^2 2t$, б) t^3e^{2t}.

1.22 а) $e^{3t}\,\mathrm{sh}4t$, б) $t\cdot\mathrm{sh}2t$.

1.23 а) $t\sin 6t$, б) $e^{t}\sin t$.

1.24 а) $2t\cdot \mathrm{ch}\,5t$, б) $\int_0^t \cos^2\tau\, d\tau$.

1.25 а) $e^{-3t}\cos 4t$, б) $\int_0^t \sin^2\tau\, d\tau$.

1.26 а) $2t\cdot \mathrm{sh}\,6t$, б) $e^{2}\,\mathrm{sh}\,2t$.

1.27 а) $t\cos t\sin t$, б) $\cos^2 2t$.

1.28 а) $e^{-5t}\,\mathrm{sh}\,4t$ б) $e^{t}\,\mathrm{sh}\,2t$.

1.29 а) $te^{t}\,\mathrm{sh}\,t$, б) $\int_0^t \cos 4\tau\, d\tau$.

1.30 а) t^2e^{-t}, б) $t^2\cos 2t$.

1.31 а) $e^{2t}\cos t$, б) $e^{-2t}\sin^2 t$.

2 Найти оригиналы по изображению:

2.1 а) $\dfrac{2p}{(p^2+1)(p^2+4)}$, б) $\dfrac{e^{-2p}}{p^2}$.

2.2 а) $\dfrac{3}{(p^2+9)(p^2+16)}$, б) $\dfrac{e^{-p}}{p^4}$.

2.3 а) $\dfrac{6p^2}{(p^2+25)(p^2+36)}$, б) $\dfrac{pe^{-p}}{p^2+1}$.

2.4 а) $\dfrac{7}{(p^2+49)(p^2+64)}$, б) $\dfrac{1}{p^2+4}$.

2.5 а) $\dfrac{3p}{(p^2+9)(p^2+1)}$, б) $\dfrac{1}{(p^2-1)(p^2+4)}$.

2.6 а) $\dfrac{5p^2}{(p^2+4)(p^2+25)}$, б) $\dfrac{e^{-p}}{p^3}$.

2.7 а) $\dfrac{4}{(p^2+36)(p^2+16)}$, б) $\dfrac{7}{p^2+4p+3}$.

2.8 а) $\dfrac{p^2+12p+4}{p\left(p^2+12p+36\right)}$, б) $\dfrac{6}{p^2+p-2}$.

2.9 а) $\dfrac{2p^2-2p+4}{p\left(p^2+4p+4\right)}$, б) $\dfrac{4}{p^2-2p-3}$.

2.10 а) $\dfrac{3p^2+2p+8}{p\left(p^2+6p+9\right)}$, б) $\dfrac{5}{p^2-3p+2}$.

2.11 а) $\dfrac{4p^2-3p+3}{p\left(p^2-4p+4\right)}$, б) $\dfrac{3}{p^2+4p-5}$.

2.12 а) $\dfrac{2p^2-5p+4}{p\left(p^2-6p+9\right)}$, б) $\dfrac{2}{p^2+3p+2}$.

2.13 а) $\dfrac{3p^2-4p+5}{p(p^2+2p+1)}$, б) $\dfrac{1}{p^2+2p-3}$.

2.14 а) $\dfrac{p^2-3p+4}{p(p^2-2p+1)}$, б) $\dfrac{p}{p^2+p+1}$.

2.15 а) $\dfrac{2p^2-3p+3}{p(p^2+8p+16)}$, б) $\dfrac{p^2}{(p+2)^3}$.

2.16 а) $\dfrac{4p^2+3p+1}{p(p^2+10p+25)}$, б) $\dfrac{1}{p(p+2)^2}$.

2.17 а) $\dfrac{4p}{(p^2+36)(p^2+1)}$, б) $\dfrac{2}{p^2+3p-4}$.

2.18 а) $\dfrac{6}{(p^2+4)(p^2+9)}$, б) $\dfrac{3}{p^2-4p+3}$.

2.19 а) $\dfrac{5p^2}{(p^2+25)(p^2+1)}$, б) $\dfrac{1}{p^2-3p-4}$.

2.20 а) $\dfrac{7p}{(p^2+36)(p^2+49)}$, б) $\dfrac{4}{p^2+5p-6}$.

2.21 а) $\dfrac{3p^2+5p+3}{p(p^2-16p+64)}$, б) $\dfrac{1}{(p^2+9)^2}$.

2.22 а) $\dfrac{3p^2+4p+4}{p(p^2-14p+49)}$, б) $\dfrac{4p^2}{(p^2+1)(p^2+16)}$.

2.23 а) $\dfrac{p^2-5p+7}{p(p^2-12p+36)}$, б) $\dfrac{7}{p^2-5p+4}$.

2.24 а) $\dfrac{2p^2+3p+1}{p^3+p}$, б) $\dfrac{9}{p^2-5p-6}$.

2.25 а) $\dfrac{2p+1}{(p^2-p-6)^2}$, б) $\dfrac{p^3}{(p^2+1)^2}$.

2.26 а) $\dfrac{1}{(p+1)^2(p+2)^2}$, б) $\dfrac{1}{p^2+4}$.

2.27 а) $\dfrac{p+1}{p^3-4p}$, б) $\dfrac{1}{p^2(p^2+p-2)}$

2.28 а) $\dfrac{p^2}{p^4-1}$, б) $\dfrac{1}{p(p+1)(p+2)}$.

2.29 а) $\dfrac{1}{p^3(p+2)}$, б) $\dfrac{e^{-p}}{p^2+1}$.

2.30 а) $\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$, б) $\dfrac{p^2+2}{p^4+4}$.

3 Методами операционного исчисления решить задачу Коши:

3.1 $x''-9x=2-t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

3.2 $x''+4x=2\cos 2t$, $x(0)=0$, $x'(0)=4$.

3.3 $x''+4x=\cos 3t$, $x(0)=2$, $x'(0)=2$.

3.4 $x''+x=t\cos 2t$, $x(0)=x'(0)=0$.

3.5 $x''+2x'+x=e^{-t}$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

3.6 $x''-2x'+2x=\sin t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

3.7 $x''-9x=\operatorname{sh} t$, $x(0)=-1$, $x'(0)=3$.

3.8 $x'''-x''=e^t$, $x(0)=1$, $x'(0)=x''(0)=0$.

3.9 $x'' + 6x' + 9x = 9e^{3t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.

3.10 $x'' - 3x' + 2x = te^{t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$.

3.11 $x''' - x' = 5\cos 2t$, $x(0) = x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.

3.12 $x''' - x'' = 2t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = x''(0) = 0$.

3.13 $x''' - 2x' = 6\sin 2t$, $x(0) = x'(0) = -1$, $x''(0) = 0$.

3.14 $x''' + 4x' = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

3.15 $x'' - 4x' + 5x = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

3.16 $x'' - 4x' + 3x = e^{-t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

3.17 $x'' + 2x' + 2x = 2 + 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

3.18 $x'' - 5x' + 6x = t\sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

3.19 $x'''' + x = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = x'''(0) = 0$.

3.20 $x''' - x = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.

3.21 $x'' - 2x' + 5x = e^{t}\cos 2t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

3.22 $x'' + 3x' + 2x = e^{-3t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.

3.23 $x''' + 6x' = 3\cos 3t$, $x(0) = x'(0) = -1$, $x''(0) = 0$.

3.24 $x''' + 5x' = 5t$, $x(0) = x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.

3.25 $x''' - 3x'' + 2x' = 12e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$, $x''(0) = 0$.

3.26 $x''' - 6x' = 2\sin 3t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = x''(0) = 0$.

3.27 $x''' - 4x' = -3\,\mathrm{sh}\,t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = x''(0) = 0$.

3.28 $x''' + 3x' = 2\cos t$, $x(0) = x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.

3.29 $x''' - x'' - 2x' = 6e^{t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.

3.30 $x''' - 3x' = 4\,\mathrm{ch}\,t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = x''(0) = 1$.

4 Методом операционного исчисления найти решение системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями:

4.1 $\begin{cases} y' + y + 3z = x \cdot e^{-x}, \\ z' - 2y + z = 1 - x, \end{cases}$
$y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

4.2 $\begin{cases} y' - y - 3z = 4x^3, \\ z' - y + z = \operatorname{sh} 4x, \end{cases}$
$y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

4.3 $\begin{cases} y' - 5y + 3z = 1, \\ z' + y - z = x^2, \end{cases}$
$y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

4.4 $\begin{cases} y' + z = 5\sin 4x, \\ z' - y = -3x, \end{cases}$
$y(0) = 1,\ z(0) = -1.$

4.5 $\begin{cases} y' - 2y + z = 6x, \\ z' + 4y + 2z = 9\cos 3x, \end{cases}$
$y(0) = 2,\ z(0) = 1.$

4.6 $\begin{cases} y' + 4y - 2z = e^{2x}, \\ z' - 4y + z = 3 \cdot e^{x}, \end{cases}$
$y(0) = z(0) = 0.$

4.7 $\begin{cases} y' + y + z = \sin 3x, \\ z' + y - z = 6x^2, \end{cases}$
$y(0) = -2,\ z(0) = 1.$

4.8 $\begin{cases} y' - y - z = 6 \cdot e^{3x}, \\ z' - y + z = 5x^4, \end{cases}$
$y(0) = 1,\ z(0) = -2.$

4.9 $\begin{cases} y' - y + 4z = x \cdot e^{x}, \\ z' + 3y - z = x, \end{cases}$
$y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

4.10 $\begin{cases} y' + 2y + 2z = 10x^3, \\ z' - 2y - 2z = 8\cos 4x, \end{cases}$
$y(0) = -1,\ z(0) = 1.$

4.11 $\begin{cases} y' - 2y - 2z = x - 1, \\ z' - y + 3z = \sin x, \end{cases}$
$y(0) = z(0) = 0.$

4.12 $\begin{cases} y' + 3y - 2z = x^2 + 1, \\ z' - 2y + z = x, \end{cases}$
$y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

4.13 $\begin{cases} y' + y + z = 3e^{-3x}, \\ z' - 2y - z = x^3, \end{cases}$
$y(0) = z(0) = 0.$

4.14 $\begin{cases} y' + 2z = 4, \\ z' - y = \operatorname{ch} 2x, \end{cases}$
$y(0) = 2,\ z(0) = 1.$

4.15 $\begin{cases} y' - y - 4z = x^2 \sin x, \\ z' + 4y - z = x, \end{cases}$

$y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

4.16 $\begin{cases} y' - 4z = 8\,\mathrm{sh}\,2x, \\ z' + y = 2x, \end{cases}$

$y(0) = -2,\ z(0) = -1.$

4.17 $\begin{cases} y' + y + 3z = 4x, \\ z' + y - z = 12 \cdot \mathrm{sh}\,4x, \end{cases}$

$y(0) = -1,\ z(0) = -2.$

4.18 $\begin{cases} y' + y + 3z = 1, \\ z' - 2y - z = x \cdot \cos x, \end{cases}$

$y(0) = z(0) = 0.$

4.19 $\begin{cases} y' - y + 2z = 3 + x, \\ z' - y + z = e^x, \end{cases}$

$y(0) = z(0) = 0.$

4.20 $\begin{cases} y' - y + 2z = 3 \cdot \cos 2x, \\ z' - y + z = 1, \end{cases}$

$y(0) = -1,\ z(0) = 2.$

4.21 $\begin{cases} y' - y - z = x, \\ z' + 2y + z = 10 \cdot \mathrm{ch}\,3x, \end{cases}$

$y(0) = 2,\ z(0) = -1.$

4.22 $\begin{cases} y' + 3y - z = x \cdot \sin x, \\ z' - y + z = x, \end{cases}$

$y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

4.23 $\begin{cases} y' - 2y + z = 1, \\ z' + y - 2z = x^2, \end{cases}$

$y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

4.24 $\begin{cases} y' + 2y + z = \sin x, \\ z' - 4y - 2z = \cos x, \end{cases}$

$y(0) = z(0) = 0.$

4.25 $\begin{cases} y' + 2y + 3z = 2x, \\ z' - 3y + 2z = x^2, \end{cases}$

$y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

4.26 $\begin{cases} y' - z = x^3, \\ z' + y = 3 \cdot \sin 2x, \end{cases}$

$y(0) = -2,\ z(0) = 0.$

4.27 $\begin{cases} y' - 9z = 8\,\mathrm{ch}\,x, \\ z' - y = e^{-2x}, \end{cases}$

$y(0) = 2,\ z(0) = 0.$

4.28 $\begin{cases} y' + 2y + z = 5x^4, \\ z' - 4y - 2z = 2e^{2x}, \end{cases}$

$y(0) = 0,\ z(0) = -2.$

4.29 $\begin{cases} y' - y - z = \sin x, \\ z' + y - 2z = 0, \end{cases}$

$y(0) = z(0) = 0.$

4.30 $\begin{cases} y' + y - 2z = 1 - x, \\ z' - 2y = x^2, \end{cases}$

$y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

Литература

1 Высшая математика. Специальные главы : учебное пособие для студентов вузов / П. И. Чинаев [и др]. – Киев: Вища школа, 1981.

2 Демидович, В. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / В. П. Демидович. – М. : Наука, 1977.

3 Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости : учебное пособие для вузов / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. Наука, 1981.

4 Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учебное пособие для вузов / И. И. Привалов. – М. : Наука, 1977.

5 Пчелин, Б. К. Специальные разделы высшей математики : учебное пособие для втузов / Б. К. Пчелин. – М. : Высшая математика, 1973.

6 Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного : учебник для вузов / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М. : Наука, 1989.

7 Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты) : учеб. пособие для вузов / В. Ф. Чудесенко. – М. : Высш. школа, 1983.

Учебное издание

Денисенко Тамара Андреевна
Марченко Лариса Николаевна
Парукевич Ирина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методический комплекс

В трех частях

Часть 3

Теория функций комплексной переменной

В авторской редакции

Подписано в печать 22.01.09(3) Бумага писчая №1. Формат 60x84 1/16. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 11,9. Уч-изд. л. 9,3. Тираж 25 экз.

Отпечатано в учреждении образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104